Б.П.吉米多维奇

数学分析习题全解 2

原题译自俄文第13版

最新校订本

南京大学数学系
廖良文 许 宁 编著

一元函数的微分学

A·P·G 安徽出版集团
安徽人民出版社
ANHUI PEOPLE'S PUBLISHING HOUSE

责任编辑/王玉法　封面设计/王国亮

经典名著最新版本
全书增补数百新题
题型最全题量最大
数学名家详细解析

吉米多维奇数学分析习题全解（一）——分析引论

吉米多维奇数学分析习题全解（二）——一元函数的微分学

吉米多维奇数学分析习题全解（三）——不定积分　定积分

吉米多维奇数学分析习题全解（四）——级数

吉米多维奇数学分析习题全解（五）——多元函数的微分学　带参数的积分

吉米多维奇数学分析习题全解（六）——重积分和曲线积分

吉米多维奇数学分析习题全集


ISBN 978-7-212-02696-7

定价：20.00 元

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析
习题全解
（二）

南京大学数学系
廖良文　许　宁　编著
杨立信　译

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解. 2/(苏)吉米多维奇著. 廖良文，许宁编著. 一合肥：安徽人民出版社，2005

ISBN 978－7－212－02696－7

Ⅰ. 吉… Ⅱ. ①吉…②廖…③许… Ⅲ. 数学分析－高等学校－解题 Ⅳ. 017－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113599 号

吉米多维奇数学分析习题全解(二)

(苏)吉米多维奇 著 廖良文 许 宁 编著 杨立信 译

责任编辑 王玉法　　**封面设计** 王国亮

出版发行 安徽人民出版社

发 行 部 0551－3533258　　0551－3533292(传真)

经　　销 新华书店

印　　刷 南京新洲印刷有限公司

开　　本 880×1230　1/32　**印张** 14.5　**字数** 350 千

版　　次 2010 年 1 月第 3 版(最新校订本)

标准书号 ISBN978－7－212－02696－7

定　　价 20.00 元

前　言

数学分析是大学数学系的一门重要必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是理工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》，以俄文第 13 版（最新版本）为基础，新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，共计有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答。为了给广大高校师生提供学习参考，应安徽人民出版社的同志邀请，我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。

本书自出版以来受到广大高校师生的高度肯定，深受读者喜爱，畅销不衰。此次再版，我们纠正了前一版中存在的个别错误，对版面进行了适当调整。在此对为此书付出辛勤劳动的各位老师表示深切的谢意！

由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

目　录

第二章 一元函数的微分学

§1. 显函数的导数

1. 导数的定义

如果 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值，则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称作函数 $y = f(x)$ 的增量.

表达式：$y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ①

若有意义，则称为导函数，而函数 $f(x)$ 本身在此情况下称作可微分的函数.

导数 $f'(x)$ 在几何上为函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率[$\tan\alpha = f'(x)$].（图 6）

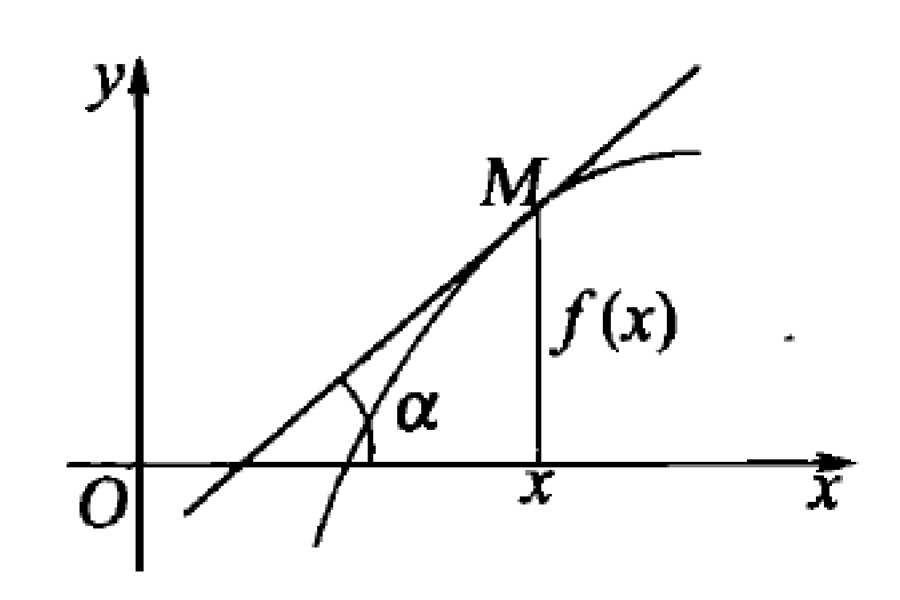


图 6

2. 求解导数的基本规则

如果 c 是常数且函数

$$u = u(x), v = v(x), w = w(x),$$

都有导数，则

(1) $c' = 0$;

(2) $(cu)' = cu'$;

(3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;

(4) $(uv)' = u'v + v'u$;

(5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}(v \neq 0)$;

(6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$(n 为常数);

(7) 如果函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导函数,则

$y'_x = y'_u u'_x$.

3. 基本公式

设 x 是自变数,则

(1) $(x^n)' = nx^{n-1}$(n 为常数).

(2) $(\sin x)' = \cos x$.

(3) $(\cos x)' = -\sin x$.

(4) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

(5) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

(6) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(7) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(8) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

(9) $(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

(10) $(a^x)' = a^x \ln a\ (a > 0)$, $(e^x)' = e^x$.

(11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}\quad (a > 0$, 且 $a \neq 1)$;

$(\ln x)' = \frac{1}{x}\quad (x > 0)$.

(12) $(\text{sh}\, x)' = \text{ch}\, x$.

(13) $(\text{ch}\, x)' = \text{sh}\, x$.

(14) $(\text{th}\, x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$.

(15) $(\mathrm{cth}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

4. 单侧导数

表达式 $f'_-(x) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$,

及 $$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

分别称作函数 $f(x)$ 在 x 点的左导函数或右导函数.

导数 $f'(x)$ 的存在充要条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

5. 无穷导数

如果在点 x 函数 $f(x)$ 是连续的，且

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x 有无穷的导函数. 在这种情况下函数 $y = f(x)$ 的图形在点 x 的切线与 Ox 轴垂直.

【821】 如果 x 由 1 变到 1000，求出自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \lg x$ 的对应增量 Δy.

解 $\Delta x = 1000 - 1 = 999$,

$\Delta y = \lg 1000 - \lg 1 = 3$.

【822】 如果 x 由 0.01 变到 0.001，求出自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的对应增量 Δy.

解 $\Delta x = 0.001 - 0.01 = -0.009$,

$$\Delta y = \frac{1}{0.001} - \frac{1}{0.01} = 900.$$

【823】 若(1) $y = ax + b$;

(2) $y = ax^2 + bx + c$;

(3) $y = a^x$.

变量 x 有增量 Δx，求出增量 Δy.

解 (1) $\Delta y = [a(x+\Delta x) + b] - [ax + b]$

$= a\Delta x$.

(2) $\Delta y=[a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+C]-[ax^2+bx+C]$

$=(2ax+b)\Delta x+a(\Delta x)^2$.

(3) $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$.

【824】 证明:(1) $\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x)$;

(2) $\Delta[f(x)g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

证 (1) $\Delta[f(x)+g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]$

$=\Delta f(x)+\Delta g(x)$.

(2) $\Delta[f(x)g(x)]$

$=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)$

$=[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x)$

$+f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]$

$=\Delta f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\Delta g(x)$.

【825】 经过曲线 $y=x^2$ 上的两个点 $A(2,4)$ 及 $A'(2+\Delta x, 4+\Delta y)$ 引出割线 AA',求此割线的斜率,若(1) $\Delta x=1$;(2) $\Delta x=0.1$;(3) $\Delta x=0.01$;(4) Δx 为任意小.

已知曲线在点 A 上的切线的斜率等于多少?

解 割线 AA' 的斜率为

$$k_{AA'}=\frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}=4+\Delta x,$$

(1) $k_{AA'}=5$, (2) $k_{AA'}=4.1$,

(3) $k_{AA'}=4.01$, (4) $k_{AA'}=4+\Delta x$.

于是,在 A 点的切线斜率为

$$k_A=\lim_{A'\to A}k_{AA'}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4,$$

【826】 利用函数 $y=x^3$ 将 Ox 轴上的线段 $1\leqslant x\leqslant 1+h$ 映射到 Oy 轴上. 求其平均的伸长系数. 若(1) $h=0.1$;(2) $h=0.01$;(3) $h=0.001$,求出上述系数的值. 又当 $x=1$ 时,伸长系数等于多少?

解 平均伸长系数为

$$\overline{L}=\frac{(1+h)^3-1}{h}=3+3h+h^2$$

(1) $\overline{L}=3+3\cdot(0.1)+(0.1)^2=3.31$;

(2) $\overline{L}=3+3\cdot(0.01)+(0.01)^2=3.0301$;

(3) $\overline{L}=3+3\cdot(0.001)+(0.001)^2=3.003001$.

于是，在点 $x=1$，伸长系数为

$$L|_{x=1}=\lim_{h\to0}\overline{L}=\lim_{h\to0}(3+3h+h^2)=3.$$

【827】 某点沿 Ox 轴运动的规律用下式表示：

$$x=10t+5t^2,$$

其中 t 表时间(以秒计)；x 表距离(以米计).

求出在时间 $20\leqslant t\leqslant 20+\Delta t$ 内某点的平均运动速度，若：(1) $\Delta t=1$；(2) $\Delta t=0.1$；(3) $\Delta t=0.01$. 计算此平均速度的值当 $t=20$ 时其运动速度等于多少?

解 平均速度为

$$\overline{v}=\frac{[10(20+\Delta t)+5(20+t)^2]-[10\times20+5\times20^2]}{\Delta t}$$

$$=210+5\Delta t,$$

(1) $\overline{v}=210+5\times1=215$(米/秒)，

(2) $\overline{v}=210+5\times0.1=210.5$(米/秒)，

(3) $\overline{v}=210+5\times0.01=210.05$(米/秒)，

于是当 $t=20$ 时运动的速度为

$$v|_{t=20}=\lim_{\Delta t\to0}\overline{v}=\lim_{\Delta t\to0}(210+5\Delta t)=210(米/秒).$$

【828】 根据导数的定义，直接求出以下函数的导数：(1) x^2；(2) x^3；(3) $\frac{1}{x}$；(4) $\sqrt{x}$；(5) $\sqrt[3]{x}$；(6) $\tan x$；(7) $\cot x$；(8) $\arcsin x$；(9) $\arccos x$；(10) $\arctan x$.

解 (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$，

于是 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}(2x+\Delta x)=2x$.

(2) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

(3) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

(4) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x > 0).$$

(5) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{(x+\Delta x)x} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad (x \neq 0).$$

(6) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{\tan x + \tan\Delta x}{1 - \tan x\tan\Delta x} - \tan x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\tan\Delta x(1 + \tan^2 x)}{\Delta x(1 - \tan x\tan\Delta x)}$$

$$= 1 + \tan^2 x = \sec^2 x.$$

(7) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\cot(x+\Delta x) - \cot x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\tan x - \tan(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\tan x\tan(x+\Delta x)}$$

$$= -\sec^2 x \cdot \frac{1}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

(8) 由三角函数公式有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arcsin(x+\Delta x) - \arcsin x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin\left[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\cdot x\right]}{\Delta x}.$$

令　$t = (x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\,x$,

则当 $\Delta x \to 0$ 时,$t \to 0$. 从而

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2(1-x^2) - x^2\left[1-(x+\Delta x)^2\right]}{\Delta x\left[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

其中　$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\sin u} = 1.$

(9) 由三角函数公式,有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arccos(x+\Delta x) - \arccos x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin\left[x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2} - (x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}\right]}{\Delta x}.$$

令　$t = x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2} - (x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}$,

则当 $\Delta x \to 0$ 时,$t \to 0$. 于是

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2} - (x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x-\Delta x}{x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2} + (x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(10) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\arctan(x+\Delta x)-\arctan x}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arctan\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arctan\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)},$$

于是 $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arctan\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{1}{1+x^2},$$

其中利用$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\tan u}=1$.

【829】 若 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$

求 $f'(1),f'(2),f'(3)$.

解 $$f'(x)=(x-2)^2(x-3)^3+2(x-1)(x-2)(x-3)^3+3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$$

$$=2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9).$$

于是 $$f'(1)=(-1)^2(-2)^3=-8,$$

$$f'(2)=f'(3)=0.$$

【830】 若:$f(x)=x^2\sin(x-2)$,求 $f'(2)$.

解 $f'(x)=2x\sin(x-2)+x^2\cos(x-2)$,

于是 $f'(2)=2^2\cos 0=4$.

【831】 $f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$,求 $f'(1)$.

解 法一:

$$f'(x)=1+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}},$$

所以　$$f'(1)=1+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\pi}{4}.$$

法二：当 $x=1$ 时

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\Delta x+\Delta x\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}}{\Delta x}$$

$$=1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}},$$

于是　$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right)$$

$$=1+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\pi}{4}.$$

【832】　若函数 $f(x)$ 在点 a 可微分，求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

解　设 $x-a=\Delta x$，则当 $x\to a$ 时，$\Delta x\to 0$，于是

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a).$$

【833】　证明：如果函数 $f(x)$ 可微分，且 n 为自然数，则

$$\lim_{x\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x),\qquad ①$$

反之，如果对于函数 $f(x)$ 存在极限 ①，能否断定此函数有导数？

研究狄利克雷函数的例子(参阅第一章，题 734).

证　$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

反之，$f(x)$ 不一定可导. 例如，对于狄利赫列函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

在任一有理数点是不连续，当然在这些点也不可导. 但当 x 为有理数时，$x+\frac{1}{n}$ 仍为有理数，故

$$\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)=1-1=0 \qquad (x \text{ 为有理数}),$$

从而 $$\lim_{n\to\infty} n\left[\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)\right]=0.$$

利用导数表，求下列函数的导函数(834 ～ 843).

【834】 $y=2+x-x^2$,

问 $y'(0)$；$y'\left(\frac{1}{2}\right)$；$y'(1)$；$y'(-10)$ 等于多少？

解 $y'(x)=1-2x$,

所以 $$y'(0)=1,y'\left(\frac{1}{2}\right)=0,$$

$$y'(1)=-1,y'(-10)=21.$$

【835】 $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$

问 x 为何值时：

(1) $y'(x)=0$；(2) $y'(x)=-2$；(3) $y'(x)=10$.

解 $y'(x)=x^2+x-2$.

(1) 由 $y'(x)=0$，得

$$x^2+x-2=0.$$

解之得 $x=-2$ 或 $x=1$；

(2) 由 $y'(x)=-2$，得

$$x^2+x=0.$$

解之得 $x=-1$ 或 $x=0$，

(3) 由 $y'(x)=10$，得

$$x^2+x-12=0.$$

解之得 $x=-4$ 或 $x=3$.

【836】 $y=a^5+5a^3x^2-x^5$.

解 $y'=10a^3x-5x^4$.

【837】 $y=\dfrac{ax+b}{a+b}$.

解 $y'=\dfrac{a}{a+b}$.

【838】 $y=(x-a)(x-b)$.

解 $y'=(x-b)+(x-a)=2x-(a+b)$.

【839】 $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

解
$$\begin{aligned}y'&=(x+2)^2(x+3)^3+2(x+1)(x+2)(x+3)^3\\&\quad+3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2\\&=(x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3)\\&\quad+2(x+1)(x+3)+3(x+1)(x+2)]\\&=2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9).\end{aligned}$$

【840】 $y=(x\sin\alpha+\cos\alpha)(x\cos\alpha-\sin\alpha)$.

解
$$\begin{aligned}y'&=\sin\alpha(x\cos\alpha-\sin\alpha)+(x\sin\alpha+\cos\alpha)\cos\alpha\\&=x\sin2\alpha+\cos2\alpha.\end{aligned}$$

【841】 $y=(1+nx^m)(1+mx^n)$.

解
$$\begin{aligned}y'&=mnx^{m-1}(1+mx^n)+(1+nx^m)n\cdot mx^{n-1}\\&=mn[x^{m-1}+x^{n-1}+(n+m)x^{n+m-1}].\end{aligned}$$

【842】 $y=(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

解
$$\begin{aligned}y'&=-(1-x^2)^2(1-x^3)^3-4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3\\&\quad-9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2\\&=-(1-x^2)(1-x^3)^2(1-x)^2(1+6x+15x^2+14x^3)\\&=-(1-x)^5(1+x)(1+2x)\cdot\\&\qquad(1+4x+7x^2)(1+x+x^2)^2.\end{aligned}$$

【842.1】 $y=(5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$.

解
$$\begin{aligned}y'&=20(5+2x)^9(3-4x)^{20}-80(5+2x)^{10}(3-4x)^{19}\\&=20(5+2x)^9(3-4x)^{19}\cdot[3-4x-4(5+2x)]\\&=-20(12x+17)(5+2x)^9(3-4x)^{19}.\end{aligned}$$

【843】 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}$.

解 $y'=-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{9}{x^4}\right)\quad(x\neq 0).$

【844】 证明公式：

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

证 $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'$

$$=\frac{(ax+b)'(cx+d)-(ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2}$$

$$=\frac{a(cx+d)-(ax+b)\cdot c}{(cx+d)^2}$$

$$=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\frac{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}\quad(cx+d\neq 0).$$

求下列函数的导数(845 ～ 871).

【845】 $y=\frac{2x}{1-x^2}.$

解 $y'=\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}$

$$=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}\quad(x\neq\pm 1).$$

【846】 $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}.$

解 $y'=\left[\frac{2}{1-x+x^2}-1\right]'=\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.$

【847】 $y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}.$

解 $y'=\frac{(1-x)^2(1+x)^3-x[3(1-x)^2(1+x)^2-2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1+x)^6}$

$$=\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}\quad(x\neq\pm 1).$$

【848】 $y=\frac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}.$

解　$y'=\frac{[-2x(2-x^3)-3x^2(2-x^2)](1-x)^2+2(2-x^2)(2-x^3)(1-x)}{(1-x)^4}$

$=\frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}\quad(x\neq 1).$

【849】　$y=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}.$

解　$y'=\frac{-p(1-x)^{p-1}(1+x)^q-q(1-x)^p(1+x)^{q-1}}{(1+x)^{2q}}$

$=-\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}(x\neq -1).$

【850】　$y=\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}.$

解　$y'=\frac{[px^{p-1}(1-x)^q-qx^p(1-x)^{q-1}](1+x)-x^p(1-x)^q}{(1+x)^2}$

$=\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}[p-(q+1)x-(p+q-1)x^2]$

$(x\neq -1).$

【851】　$y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}.$

解　$y'=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\quad(x>0).$

【852】　$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$

解　$y'=-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right)\quad(x>0).$

【853】　$y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}.$

解　$y'=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\quad(x>0).$

【854】　$y=x\sqrt{1+x^2}.$

解　$y'=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$

【855】　$y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}.$

解 $y'=\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$

$$+(1+x)\left[\frac{x\sqrt[3]{3+x^3}}{\sqrt{2+x^2}}+\frac{x^2\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}\right]$$

$$=\frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}(x\neq\sqrt[3]{-3}).$$

【856】 $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

解 $y'=\dfrac{-m(1-x)^{m-1}(1+x)^n+n(1-x)^m(1+x)^{n-1}}{(m+n)\sqrt[m+n]{[(1-x)^n(1+x)^m]^{m+n-1}}}$

$$=\frac{(n-m)-(n+m)x}{(m+n)\sqrt[m+n]{(1-x)^n(1+x)^m}}\qquad(x\neq\pm1).$$

【857】 $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解 $y'=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}$

$$=\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\qquad(|x|<|a|).$$

【858】 $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

解 $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}}\cdot\dfrac{3x^2(1-x^3)+3x^2(1+x^3)}{(1-x^3)^2}$

$$=\frac{2x^2}{1-x^6}\cdot\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}\qquad(x\neq\pm1).$$

【859】 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$.

解 $y'=-\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})+\sqrt{1+x^2}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{(1+x^2)(x+\sqrt{1+x^2})^2}$

$$=-\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

【860】 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

解 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$

$=\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

【861】 $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

解 $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$=\dfrac{1}{27\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}$

$(x\neq0,-1,-8)$.

【862】 $y=\cos2x-2\sin x$.

解 $y'=-2\sin2x-2\cos x=-2\cos x(1+2\sin x)$.

【863】 $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

解 $y'=-2x\cos x-(2-x^2)\sin x+2\sin x+2x\cos x$

$=x^2\sin x$.

【864】 $y=\sin(\cos^2x)\cdot\cos(\sin^2x)$.

解 $y'=-2\sin x\cos x\cos(\cos^2x)\cdot\cos(\sin^2x)$

$-2\sin x\cos x\sin(\cos^2x)\cdot\sin(\sin^2x)$

$=-\sin2x\cos(\cos^2x-\sin^2x)$

$=-\sin2x\cos(\cos2x)$.

【865】 $y=\sin^nx\cos nx$.

解 $y'=n\sin^{n-1}x\cdot\cos x\cdot\cos nx-n\sin^nx\sin nx$

$=n\sin^{n-1}x(\cos x\cos nx-\sin x\sin nx)$

$=n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.

【866】 $y=\sin[\sin(\sin x)]$.

解 $y'=\cos x\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)]$

【867】 $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$.

解 $y'=\dfrac{2\sin x\cos x\cdot\sin x^2-2x\cdot\sin x^2\cdot\sin^2 x}{\sin^2 x^2}$

$=\dfrac{2\sin x(\cos x\cdot\sin x^2-x\sin x\cdot\sin x^2)}{\sin^2 x^2}$

$(x^2\neq k\pi, k=0,+1,+2,\cdots,)$.

【868】 $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

解 $y'=\dfrac{-2\sin^3 x-4\sin x\cos^2 x}{4\sin^4 x}=-\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$

$(x\neq k\pi, k=0,\pm1,\cdots)$.

【869】 $y=\dfrac{1}{\cos^n x}$.

解 $y'=-\dfrac{-n\cos^{n-1}x\cdot\sin x}{\cos^{2n}x}=\dfrac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}$

$\left(x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$.

【870】 $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$.

解 $y'=\dfrac{1}{(\cos x+x\sin x)^2}$

$\cdot[(\cos x-\cos x+x\sin x)(\cos x+x\sin x)$

$-(\sin x-x\cos x)\cdot(-\sin x+\sin x+x\cos x)]$

$=\dfrac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$.

【871】 $y=\tan\dfrac{x}{2}-\cot\dfrac{x}{2}$.

解 $y'=\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\csc^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{\sin^2 x}$

$(x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

【872】 $y=\tan x-\dfrac{1}{3}\tan^3 x+\dfrac{1}{5}\tan^5 x$.

解 $y'=\sec^2 x-\tan^2 x\sec^2 x+\tan^4 x\sec^2 x$

$$=1+\tan^6 x \qquad \left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\cdots\right).$$

【873】 $y=4\sqrt[3]{\cot^2 x}+\sqrt[3]{\cot^8 x}$.

解 $$y'=\frac{8}{3}(\cot x)^{-\frac{1}{3}}(-\csc^2 x)+\frac{8}{3}(\cot x)^{\frac{5}{3}}(-\csc^2 x)$$

$$=-\frac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\cot x}}$$

$$\left(x\neq k\pi,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

【874】 $y=\sec^2\frac{x}{a}+\operatorname{cosec}^2\frac{x}{a}$.

解 $$y'=\frac{2}{a}\sec^2\frac{x}{a}\tan\frac{x}{a}-\frac{2}{a}\csc^2\frac{x}{a}\cot\frac{x}{a}$$

$$=\frac{2}{a}\left(\frac{\sin\frac{x}{a}}{\cos^3\frac{x}{a}}-\frac{\cos\frac{x}{a}}{\sin^3\frac{x}{a}}\right)=\frac{2}{a}\cdot\frac{\sin^4\frac{x}{a}-\cos^4\frac{x}{a}}{\sin^3\frac{x}{a}\cos^3\frac{x}{a}}$$

$$=\frac{2}{a}\frac{\sin^2\frac{x}{a}-\cos^2\frac{x}{a}}{\sin^3\frac{x}{a}\cos^3\frac{x}{a}}=\frac{-16\cos\frac{2x}{a}}{a\sin^3\frac{2x}{a}}$$

$$\left(x\neq\frac{k\pi a}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

【875】 $y=\sin[\cos^2(\tan^3 x)]$.

解 $$y'=\cos[\cos^2(\tan^3 x)]\cdot[-2\cos(\tan^3 x)\cdot\sin(\tan^3 x)]\cdot[3\tan^2 x\cdot\sec^2 x]$$

$$=-3\tan^2 x\sec^2 x\cdot\sin(2\tan^3 x)\cdot\cos[\cos^2(\tan^3 x)]$$

$$\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

【876】 $y=e^{-x^2}$.

解 $y'=-2xe^{-x^2}$.

【877】 $y=2^{\tan\frac{1}{x}}$.

解 $$y'=-\frac{1}{x^2}\cdot\sec^2\frac{1}{x}\cdot2^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\ln2$$

$$\left(x\neq 0, x\neq \frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right).$$

【878】 $y=e^x(x^2-2x+2)$.

解 $y'=e^x(x^2-2x+2)+e^x(2x-2)=x^2e^x$.

【879】 $y=\left[\frac{1-x^2}{2}\sin x-\frac{(1+x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}$.

解
$$\begin{aligned}y'&=\left[-x\sin x+\frac{1-x^2}{2}\cos x\right.\\&\quad\left.-(1+x)\cos x+\frac{(1+x)^2}{2}\sin x\right]e^{-x}\\&\quad-\left[\frac{1-x^2}{2}\sin x-\frac{(1+x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}\\&=x^2e^{-x}\sin x.\end{aligned}$$

【880】 $y=e^x\left(1+\cot\frac{x}{2}\right)$.

解
$$\begin{aligned}y'&=e^x\left(1+\cot\frac{x}{2}\right)+e^x\cdot\left(-\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\right)\\&=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

$$(x\neq 2k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

【881】 $y=\frac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

解
$$\begin{aligned}y'&=\frac{3^x(\ln 3\cdot\cos x-\sin x)-3^x\ln 3\cdot(\ln 3\cdot\sin x+\cos x)}{3^{2x}}\\&=-\frac{(1+\ln^2 3)\sin x}{3^x}.\end{aligned}$$

【882】 $y=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

解
$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{ax}[a(a\sin bx-b\cos bx)\\&\quad+(ab\cos bx+b^2\sin bx)]\\&=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx.\end{aligned}$$

【883】 $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$.

解 $y'=e^x(1+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}\cdot e^{e^x})$

$$=e^x[1+e^{e^x}(1+e^{e^{e^x}})].$$

【884】 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\quad(a>0,b>0)$.

解 两边取对数，得

$$\ln y=x\ln\frac{a}{b}+a(\ln b-\ln x)+b(\ln x-\ln a),$$

上式两边对 x 求导数得

$$\frac{y'}{y}=\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}.$$

所以 $y'=y\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right)$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^x\cdot\left(\frac{b}{x}\right)^a\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right).$$

【885】 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\quad(a>0)$.

解 $y'=a^ax^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x\cdot a^{a^x}\ln^2a$.

【886】 $y=\lg^3x^3$.

解 $y'=3\lg^2x^3\cdot\frac{1}{x^3}\cdot3x^2\cdot\lg e=\frac{9}{x}\lg e\cdot\lg^2x^3(x\neq0)$.

【887】 $y=\ln(\ln(\ln x))$.

解 $y'=\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\quad(x>e)$.

【888】 $y=\ln(\ln^2(\ln^3x))$.

解 $y'=\frac{1}{\ln^2(\ln^3x)}\cdot2\ln(\ln^3x)\cdot\frac{1}{\ln^3x}\cdot3\ln^2x\cdot\frac{1}{x}$

$$=\frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3x)}(x>e).$$

【889】 $y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2(1+x)}$.

解 $y'=\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{4}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2(1+x)^2}$

$$= \frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} \qquad (x > -1).$$

【890】 $y = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

解 $y' = \frac{1}{4}[\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)]'$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{x}{x^4-1} \qquad (|x| > 1).$$

【891】 $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$.

解 $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \ln|x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^4)$,

所以 $y' = -\frac{4x^3}{4(1+x^4)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4}\frac{4x^3}{1+x^4}$

$$= \frac{1}{x(1+x^4)^2} \qquad (x \neq 0).$$

【892】 $y = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

解 $y = \frac{1}{2\sqrt{6}}[\ln|x\sqrt{3}-\sqrt{2}| - \ln|x\sqrt{3}+\sqrt{2}|]$,

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left[\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{3x^2-2} \qquad \left(|x| > \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

【893】 $y = \frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$

$(0 < k < 1)$.

解 $y = \frac{1}{1-k}[\ln|1+x| - \ln|1-x|]$

$$- \frac{\sqrt{k}}{1-k}[\ln|1+x\sqrt{k}| - \ln|1-x\sqrt{k}|],$$

$$y' = \frac{1}{1-k}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{k}}{1-k}\left[\frac{\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}}+\frac{\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}\right]$$

$$=\frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)} \qquad (|x|<1).$$

【894】 $y=\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})$.

解 $$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})} \qquad (x>-1).$$

【895】 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 $$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left[1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

【896】 $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

解 $$y'=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

【897】 $y=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$.

解 $$y'=\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+2$$

$$=\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}).$$

【898】 $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

解 $$y'=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}$$
$$=\sqrt{x^2+a^2}.$$

【899】 $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\qquad(a>0,b>0)$.

解 $$y'=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\right)$$
$$=\frac{1}{a-bx^2}\qquad\left(|x|<\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

【900】 $y=\frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2}+3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

解 $$y'=\frac{6x\cdot x^4-(2+3x^2)\cdot 4x^3}{x^8}\sqrt{1-x^2}$$
$$+\frac{2+3x^2}{x^4}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+3\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{x}$$
$$=-\frac{8}{x^5\sqrt{1-x^2}}\qquad(0<|x|<1).$$

【901】 $y=\ln\tan\frac{x}{2}$.

解 $$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}$$
$$(0<x-2k\pi<\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

【902】 $y=\ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

解
$$y'=\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\sec^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$=\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\cos x}$$
$$\left(|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

【903】 $y=\frac{1}{2}\cot^2x+\ln\sin x$.

解
$$y'=-\cot x\cdot\csc^2x+\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$=-\cot x(\csc^2x-1)=-\cot^3x$$
$$(0<x-2k\pi<\pi;k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

【904】 $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

解
$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$$
$$=\frac{-2\cos x}{2(1-\sin^2x)}=-\frac{1}{\cos x}$$
$$\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2};k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

【905】 $y=-\frac{\cos x}{2\sin^2x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$.

解
$$y'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-\sin^3x-2\sin x\cdot\cos^2x}{\sin^4x}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$
$$=\frac{\cos^2x}{\sin^3x}$$

$(0 < x - 2k\pi < \pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

【906】 $y = \ln \dfrac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x}$

$(0 \leqslant |a| < |b|)$.

解 $$y' = \frac{-a\sin x + \sqrt{b^2 - a^2}\cos x}{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x} + \frac{b\sin x}{a + b\cos x}$$

$$= \frac{b\sqrt{b^2 - a^2} + a\sqrt{b^2 - a^2}\cos x + (b^2 - a^2)\sin x}{(b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x)(a + b\cos x)}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a + b\cos x}.$$

【907】 $y = \dfrac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$.

解 $$y' = -\frac{1}{x^2}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$$

$$+ \frac{1}{x}\left[\frac{3}{x}\ln^2 x + \frac{6}{x}\ln x + \frac{6}{x}\right]$$

$$= -\frac{\ln^3 x}{x^2} \quad (x > 0).$$

【908】 $y = \dfrac{1}{4x^4}\ln\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{16x^4}$.

解 $$y' = -\frac{1}{x^5}\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{4x^5} + \frac{1}{4x^5}$$

$$= \frac{\ln x}{x^5} \quad (x > 0).$$

【909】 $y = \dfrac{3}{2}(1 - \sqrt[3]{1 + x^2}) + 3\ln(1 + \sqrt[3]{1 + x^2})$.

解 $$y' = \frac{3}{2} \cdot 2(1 - \sqrt[3]{1 + x^2}) \cdot \left(-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1 + x^2)^2}}\right)$$

$$+ 3 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 + x^2}} \cdot \frac{2x}{3\sqrt[3]{(1 + x^2)^2}}$$

$$= \frac{2x}{1 + \sqrt[3]{1 + x^2}}.$$

【910】 $y=\ln\left[\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 $y'=\frac{1}{\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)}$

$\cdot\left[-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\right]$

$=-\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1+x\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]}(x>0)$.

【911】 $y=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$.

解 $y'=\sin(\ln x)-\cos(\ln x)$

$+x\left[\frac{1}{x}\cos(\ln x)+\frac{1}{x}\sin(\ln x)\right]$

$=2\sin(\ln x)\qquad(x>0)$.

【912】 $y=\ln\tan\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$.

解 $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}+\sin x\ln\tan x-\cos x\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x$

$=\sin x\cdot\ln\tan x$

$\left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$.

【913】 $y=\arcsin\frac{x}{2}$.

解 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\qquad(|x|<2)$.

【914】 $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$.

解 $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} \qquad (|x-1|<\sqrt{2}).$$

【915】 $y = \arctan\frac{x^2}{a}$.

解 $y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{a}\right)^2}\cdot\frac{2x}{a} = \frac{2ax}{a^2+x^4} \qquad (a\neq 0).$

【916】 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{2}}{x}$.

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)$

$$= \frac{1}{x^2+2} \qquad (x\neq 0).$$

【917】 $y = \sqrt{x} - \arctan\sqrt{x}$.

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \qquad (x\geqslant 0).$$

【918】 $y = x + \sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x$.

解 $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\arccos x + \sqrt{1-x^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x \qquad (|x|<1).$$

【919】 $y = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \arctan\sqrt{x} - \sqrt{x}$.

解 $y' = \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{x}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$

$$+\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} \qquad (x \geqslant 0).$$

【920】 $y = \arccos\frac{1}{x}$.

解 $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad (|x|>1).$$

【921】 $y = \arcsin(\sin x)$.

解 $y' = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \mathrm{sgn}(\cos x)$

$$\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right).$$

【922】 $y = \arccos(\cos^2 x)$.

解 $y' = \dfrac{2\cdot\cos x\sin x}{\sqrt{1-\cos^4 x}} = \dfrac{2\sin x\cos x}{\sqrt{\sin^2 x(1+\cos^2 x)}}$

$$= 2\mathrm{sgn}(\sin x)\frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$(x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

【923】 $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$.

解 $y' = \dfrac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}} = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$

$$\left(0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \cdots\right).$$

【924】 $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$.

解 $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{\mathrm{sgn}\,x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (0<|x|<1).$$

【925】 $y = \arctan\dfrac{1+x}{1-x}$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}$

$=\dfrac{1}{1+x^2}\qquad(x\neq 1).$

【926】 $y=\operatorname{arccot}\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right).$

解 $y'=-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)^2}$

$\cdot\dfrac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}$

$=1\qquad\left(x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$

【927】 $y=\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)\quad(a>b\geqslant 0).$

解 $y'=\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{a-b}{a+b}\cdot\tan^2\dfrac{x}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{a+b\cos x}.$

【928】 $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}.$

解 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\dfrac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}$

$=\dfrac{1+x^2}{\sqrt{4x^2}}\cdot\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}=-2\dfrac{\operatorname{sgn}x}{1+x^2}\qquad(x\neq 0).$

【929】 $y=\dfrac{1}{\arccos^2(x^2)}.$

解 $y'=-\dfrac{2}{\arccos^3(x^2)}\cdot\dfrac{-2x}{(1-x^4)}$

$=\dfrac{4x}{\sqrt{1-x^4}\cdot\arccos^3(x^2)}\qquad(|x|<1).$

【930】 $y=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan(x^3)$.

解 $y'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{1+(x^3)^2}\cdot 3x^2=\frac{1+x^4}{1+x^6}$.

【931】 $y=\ln(1+\sin^2 x)-2\sin x\cdot\arctan(\sin x)$.

解 $y'=\frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}-2\cos x\cdot\arctan(\sin x)$

$-2\sin x\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}=-2\cos x\arctan(\sin x)$.

【932】 $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

解 $y'=\frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

$=\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}\qquad(x>1)$.

【933】 $y=\ln\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\frac{a}{b}\arctan\frac{x}{b}\qquad(b\neq 0)$.

解 $y'=\frac{1}{x+a}-\frac{x}{x^2+b^2}+\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2}\cdot\frac{1}{b}$

$=\frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}\qquad(x>-a)$.

【934】 $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\qquad(a>0)$.

解 $y'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}$

$=\sqrt{a^2-x^2}\qquad(|x|<a)$.

【935】 $y=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

解 $y' = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{1+x^3} \qquad (x \neq -1).$

【936】 $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}.$

解 $y' = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right]$

$- \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}(x^2-1)-x\sqrt{2}\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{1}{1+x^4} \qquad (x \neq \pm 1).$

【937】 $y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x.$

解 $y' = (\arcsin x)^2 + 2x \cdot \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$- \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2$

$= (\arcsin x)^2 \qquad (|x| < 1).$

【938】 $y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

解 $y' = \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arccos x}{x^2}$

$+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

$= -\frac{\arccos x}{x^2} \qquad (0 < |x| < 1).$

【939】 $y = \arctan\sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$

解 $$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{x^2-1})^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} + \frac{x\ln x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x\ln x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \quad (x>1).$$

【940】 $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 $$y' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right]$$

$$= \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x|<1).$$

【941】 $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

解 $$y' = \frac{1}{12}\left(\frac{4x^3-2x}{x^4-x^2+1} - \frac{4x}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}\right)^2}\left[\frac{-4\sqrt{3}x}{(2x^2-1)^2}\right]$$

$$= \frac{x^3}{1+x^6} \quad \left(|x| \neq \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

【942】 $y = \dfrac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arccot} x^6$.

解 $$y' = \frac{6x^5(1+x^{12}) - x^6 \cdot 12x^{11}}{(1+x^{12})^2} + \frac{1}{1+x^{12}} \cdot 6x^5$$

$$= \frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}.$$

【943】 $y = \ln\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3}\arctan\dfrac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}$.

解 $$y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(1-\sqrt[3]{x})}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$=-\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}}\qquad(0<|x|<1).$$

【944】 $y=\arctan\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

解 $y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\qquad(|x|<1).$$

【945】 $y=\operatorname{arccot}\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\qquad(a>0)$.

解 $y'=-\frac{1}{1+\left(\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\right)^2}$

$$\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2\sqrt{ax-x^2}-\frac{(a-2x)^2}{2\sqrt{ax-x^2}}}{(ax-x^2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}\qquad(0<x<a).$$

【946】 $y=\frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}$.

解 $y'=-\frac{1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}-\frac{3-x}{2}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

$$+2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\qquad(|x+1|<\sqrt{2}).$$

【947】 $y=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$

解 $$y'=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\left[1+\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\left[\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}-1\right]\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right)^2}$$
$$\cdot\frac{1}{x^2}\left[\frac{x^4}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}-\sqrt[4]{1+x^4}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\qquad(x\neq 0).$$

【948】 $y=\arctan(\tan^2x).$

解 $$y'=\frac{1}{1+\tan^4x}2\tan x\cdot\sec^2x=\frac{\sin 2x}{\sin^4x+\cos^4x}$$
$$\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right).$$

【949】 $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$
$+\sqrt{1-x^2}+\arcsin x.$

解 $$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$(0<|x|<1)$.

【950】 $y = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$.

解 $y' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} - \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$$= \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x.$$

【951】 $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$.

解 $y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

【952】 $y = \arctan(x + \sqrt{1+x^2})$.

解 $y' = \frac{1}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$= \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

【953】 $y = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\cos x}\right)$.

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\cos x}\right)^2}}$

$$\cdot \frac{\sin\alpha\cos x(1-\cos\alpha\cos x) - \sin\alpha\sin x \cdot \cos\alpha\sin x}{(1-\cos\alpha\cos x)^2}$$

$$= \frac{1-\cos\alpha\cos x}{\sqrt{(\cos x - \cos\alpha)^2}} \cdot \frac{\sin\alpha(\cos x - \cos\alpha)}{(1-\cos\alpha\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha\cos x}\operatorname{sgn}(\cos x - \cos\alpha)$$

$(\cos x \neq \cos\alpha$，即 $x \neq \alpha + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

【954】 $y=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$.

解 $$y'=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}-\sqrt{3}\right)-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+\sqrt{3}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x^2+2}{x^2}}\cdot\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}-\sqrt{x^2+2}}{x^2}$$
$$=\frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}\qquad(0<|x|<1).$$

【955】 $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}$.

解 $$y'=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{1+\frac{2x^2}{1+x^4}}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+x^4}-\frac{2\sqrt{2}x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{(1+x^4)}$$
$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}\left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}-\sqrt{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}\left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}+\sqrt{2}\right)\right]$$
$$=\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\qquad(x\neq\pm1).$$

【956】 $y=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arccot}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $$y'=\frac{1}{(1+x^2)^2}\left[\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)(1+x^2)-2x^2\sqrt{1-x^2}\right]$$
$$+\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{1}{\left(1+\frac{2x^2}{1-x^2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{4}{(x^2+1)^2\sqrt{1-x^2}} \qquad (|x|<1).$$

【957】 $y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2)$.

解 $$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sin x^2-\cos x^2)^2}} \cdot 2x(\cos x^2+\sin x^2)$$

$$= \frac{2x(\cos x^2+\sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$$

$$\left(\sqrt{k\pi} < |x| < \sqrt{k\pi+\frac{\pi}{2}}; k=0,1,2,\cdots\right).$$

【958】 $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2)$.

解 $$y' = \frac{2x\cos x^2}{\sqrt{1-\sin^2 x^2}} + \frac{2x\sin x^2}{\sqrt{1-\cos^2 x^2}}$$

$$= 2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2) + \operatorname{sgn}(\sin x^2)]$$

$$\left(|x| \neq \sqrt{\frac{k\pi}{2}}; k=0,1,2,\cdots\right).$$

【959】 $y = e^{m\arcsin x}[\cos(m\arcsin x) + \sin(m\arcsin x)]$.

解 $$y' = e^{m\arcsin x}\left\{\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}[\cos(m\arcsin x)+\sin(m\arcsin x)]\right.$$

$$\left.+\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}[\cos(m\arcsin x)-\sin(m\arcsin x)]\right\}$$

$$= \frac{2m}{\sqrt{1-x^2}}e^{m\arcsin x} \cdot \cos(m\arcsin x) \qquad (|x|<1).$$

【960】 $y = \arctan e^x - \ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

解 $$y' = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2}\left(2-\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\right) = \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}.$$

【960.1】 $y = \sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}$.

解 $$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}} \cdot \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{1+x^4})^2}}$$

$$\cdot \frac{1}{4}\frac{4x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$$

$$=\frac{1}{6}\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{1+x^4})^2}\cdot\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}}.$$

【960.2】 $y=\operatorname{arccot}\dfrac{1}{\sqrt{\cot\frac{1}{x^2}}}$.

解 $$y'=\frac{1}{1+\frac{1}{\cot\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\left(\cot\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}\cdot\csc^2\frac{1}{x^2}\left(\frac{-2}{x^3}\right)$$

$$=\frac{1}{x^3\sin\frac{1}{x^2}\left(\sin\frac{1}{x^2}+\cos\frac{1}{x^2}\right)}\sqrt{\tan\frac{1}{x^2}}$$

$$\left(x\neq 0,\ |x|\neq\sqrt{\frac{k\pi}{2}},k=0,1,2,\cdots\right).$$

【960.3】 $y=\ln^2(\sec 2^{\sqrt[3]{x}})$.

解 $$y'=2\ln(\sec 2^{\sqrt[3]{x}})\cdot\frac{1}{\sec 2^{\sqrt[3]{x}}}\cdot\sec(2^{\sqrt[3]{x}})\cdot\tan(2^{\sqrt[3]{x}})\cdot\frac{2^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}}\ln 2$$

$$=\frac{2\ln 2\cdot 2^{\sqrt[3]{x}}\ln(\sec 2^{\sqrt[3]{x}})\cdot\tan(2^{\sqrt[3]{x}})}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\left(-\frac{\pi}{4}<2^{\sqrt[3]{x}}-k\pi<\frac{\pi}{4};k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right).$$

【961】 $y=x+x^x+x^{x^x}\qquad(x>0)$.

解 设 $z=x^x$,则

$\ln z=x\ln x$,

从而 $\dfrac{z'}{z}=\ln x+1$,

即 $z'=x^x(\ln x+1)$,

所以 $(x^x)'=x^x(\ln x+1)$.

同样,设 $u=x^{x^x}$,则 $\ln u=x^x\ln x$,

从而 $\dfrac{u'}{u}=(x^x)'\ln x+x^x\cdot\dfrac{1}{x}=x^x(\ln x+1)\ln x+x^x\dfrac{1}{x}$

$$= x^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right),$$

即 $\quad u' = x^{x^x}\cdot x^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right),$

所以 $\quad (x^{x^x})' = x^x\cdot x^{x^x}\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right).$

因此 $\quad y' = 1+(x^x)'+(x^{x^x})'$

$$= 1+x^x(1+\ln x)+x^x\cdot x^{x^x}\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right).$$

【962】 $y = x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x} \quad (a>0, x>0).$

解 设 $z = x^{x^a}$，则 $\ln z = x^a\ln x$，

从而 $\quad \frac{z'}{z} = ax^{a-1}\ln x + x^a\cdot\frac{1}{x},$

即 $\quad (x^{x^a})' = x^{x^a}\cdot x^{a-1}(a\ln x+1),$

设 $u = x^{a^x}$，则 $\ln u = a^x\ln x$，

从而 $\quad \frac{u'}{u} = a^x\ln a\cdot\ln x+\frac{a^x}{x},$

即 $\quad (x^{a^x})' = x^{a^x}\cdot a^x\left(\frac{1}{x}+\ln a\cdot\ln x\right).$

同样 $\quad (a^{x^x})' = a^{x^x}\cdot x^x\cdot\ln a(1+\ln x),$

因此 $\quad y' = x^{x^a}\cdot x^{a-1}(1+a\ln x)+x^{a^x}\cdot a^x\left(\frac{1}{x}+\ln a\cdot\ln x\right)$

$$+a^{x^x}\cdot x^x\cdot\ln a\cdot(1+\ln x).$$

【963】 $y = \sqrt[x]{x} \quad (x>0).$

解 $y' = (e^{\frac{1}{x}\ln x})' = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\right)$

$$= x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}(1-\ln x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

【964】 $y = (\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}.$

解 设 $z = (\sin x)^{\cos x}$，则

$$\ln z = \cos x\ln(\sin x).$$

从而 $$\frac{z'}{z}=-\sin x\ln(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x},$$

即 $$[(\sin x)^{\cos x}]'=(\sin x)^{\cos x+1}[\cot^2 x-\ln(\sin x)].$$

同样 $$[(\cos x)^{\sin x}]'$$

$$=(\cos x)^{\sin x}\left[\cos x\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$$

$$=-(\cos x)^{\sin x+1}[\tan^2 x-\ln(\cos x)].$$

从而 $$y'=(\sin x)^{\cos x+1}[\cot^2 x-\ln(\sin x)]-(\cos x)^{\sin x+1}[\tan^2 x-\ln(\cos x)]$$

$$\left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

【965】 $y=(\ln x)^x : x^{\ln x}$.

解 $$y=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}=\frac{e^{x\ln(\ln x)}}{e^{\ln^2 x}}=e^{x\ln(\ln x)-\ln^2 x}.$$

$$y'=e^{x\ln(\ln x)-\ln^2 x}[(x\ln(\ln x))'-(\ln^2 x)']$$

$$=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}-\frac{2\ln x}{x}\right]$$

$$=\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}[x\ln x\cdot\ln(\ln x)+x-2\ln^2 x].$$

【965.1】 $y=\left[\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\arctan^2 x}$.

解 $$y=e^{\arctan^2 x\ln\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}}$$

$$y'=\left[\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\arctan^2 x}\cdot\left\{2\arctan x\frac{1}{1+x^2}\ln\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}+\arctan^2 x\left[\frac{1}{\arcsin(\sin^2 x)}\cdot\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}-\frac{1}{\arccos(\cos^2 x)}\cdot\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}\right]\right\}.$$

【966】 $y=\log_x e$.

解 $y=\log_x e=\dfrac{\ln e}{\ln x}=\dfrac{1}{\ln x}$.

从而 $y'=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}\quad(x>0,x\neq 1)$.

【967】 $y=\ln(\operatorname{ch}x)+\dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

解 $y'=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}-\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^3 x}=\operatorname{th}^3 x$.

【968】 $y=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2 x}-\ln\left(\operatorname{cth}\dfrac{x}{2}\right)$.

解 $$y'=\frac{\operatorname{sh}^3 x-2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^4 x}+\frac{1}{2\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{2}\operatorname{cth}\dfrac{x}{2}}$$

$$=-\frac{2}{\operatorname{sh}^3 x}\quad(x>0).$$

【969】 $y=\arctan(\tan x)$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+\operatorname{th}^2 x}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}=\dfrac{1}{\operatorname{ch}2x}$.

【970】 $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$.

解 $$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}}\left(-\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2 x}\right)=\frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh}x)}{\operatorname{ch}x}\quad(x\neq 0).$$

【971】 $y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)$

$(0\leqslant|b|<a)$.

解 $$y'=\frac{b}{a}+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{th}^2\dfrac{x}{2}}\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{1}{2\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{2}}$$

$$=\frac{b}{a}+\frac{a^2-b^2}{a(b+a\operatorname{ch}x)}=\frac{a+b\operatorname{ch}x}{b+a\operatorname{ch}x}.$$

【972】 引入中间变量 $u=\cos^2 x$，求出函数

$y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$ 的导数.

解 令 $u=\cos^2 x$,则

$$y=\ln(u+\sqrt{1+u^2}),$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

而
$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{u+\sqrt{1+u^2}}\left(1+\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^4 x}},$$

$$\frac{du}{dx}=-2\sin x\cos x=-\sin 2x,$$

于是
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

用 972 题所示方法,求出下列函数的导数(973 ~ 976).

【973】 $y=(\arccos x)^2\left[\ln^2(\arccos x)-\ln(\arccos x)+\frac{1}{2}\right].$

解 令 $u=\arccos x$,则 $y=u^2\left[\ln^2 u-\ln u+\frac{1}{2}\right]$,

而
$$y'_u=2u\left[\ln^2 u-\ln u+\frac{1}{2}\right]+u^2\left[\frac{2\ln u}{u}-\frac{1}{u}\right]$$

$$=2u\ln^2 u=2\arccos x\cdot\ln^2(\arccos x),$$

$$u'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

因此
$$\frac{dy}{dx}=y'_u\cdot u'_x=-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\arccos x\cdot\ln^2(\arccos x)$$

$$(|x|<1).$$

【974】 $y=\frac{1}{2}\arctan(\sqrt[4]{1+x^4})+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}.$

解 令 $u=\sqrt[4]{1+x^4}$,则

$$y=\frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}.$$

而 $$y'_u=\frac{1}{2(1+u^2)}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)$$

$$=\frac{1}{1-u^4}=-\frac{1}{x^4},$$

$$u'_x=\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}.$$

因此 $$\frac{dy}{dx}=y'_u\cdot u'_x=-\frac{1}{x^4}\cdot\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$$

$$=-\frac{1}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}\qquad(x\neq 0).$$

【975】 $y=\dfrac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\dfrac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$.

解 令 $u=e^{-x^2}$,则

$$y=\frac{u\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-u^2).$$

从而 $$y'_u=\frac{\left(\arcsin u+\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\sqrt{1-u^2}+\frac{u^2\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2}$$

$$-\frac{u}{1-u^2}$$

$$=\frac{\arcsin u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}},$$

$$u'_x=-2xe^{-x^2}.$$

因此 $$\frac{dy}{dx}=y'_u\cdot u'_x=\frac{-2xe^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{3/2}}\qquad(x\neq 0).$$

【976】 $y=\dfrac{a^x}{1+a^{2x}}-\dfrac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arccot}a^{-x}$.

解 设 $u=a^x$,则

$$y=\frac{u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}\cdot \operatorname{arccot}\frac{1}{u},$$

于是　$$y'_u=\frac{1+u^2-2u^2}{(1+u^2)^2}-\frac{-2u(1+u^2)-2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\operatorname{arccot}\frac{1}{u}$$

$$-\frac{1-u^2}{1+u^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\cdot\frac{1}{u^2}$$

$$=\frac{4u\operatorname{arccot}\frac{1}{u}}{(1+u^2)^2}=\frac{4a^x\cdot \operatorname{arccot}(a^{-x})}{(1+a^{2x})^2},$$

$$u'_x=a^x\ln a.$$

因此　$$\frac{dy}{dx}=y'_u\cdot u'_x=\frac{4a^{2x}\ln a}{(1+a^{2x})^2}\operatorname{arccot}(a^{-x})\qquad (a>0).$$

【977】 求下列函数的导函数并作函数及其导函数的图形，若：

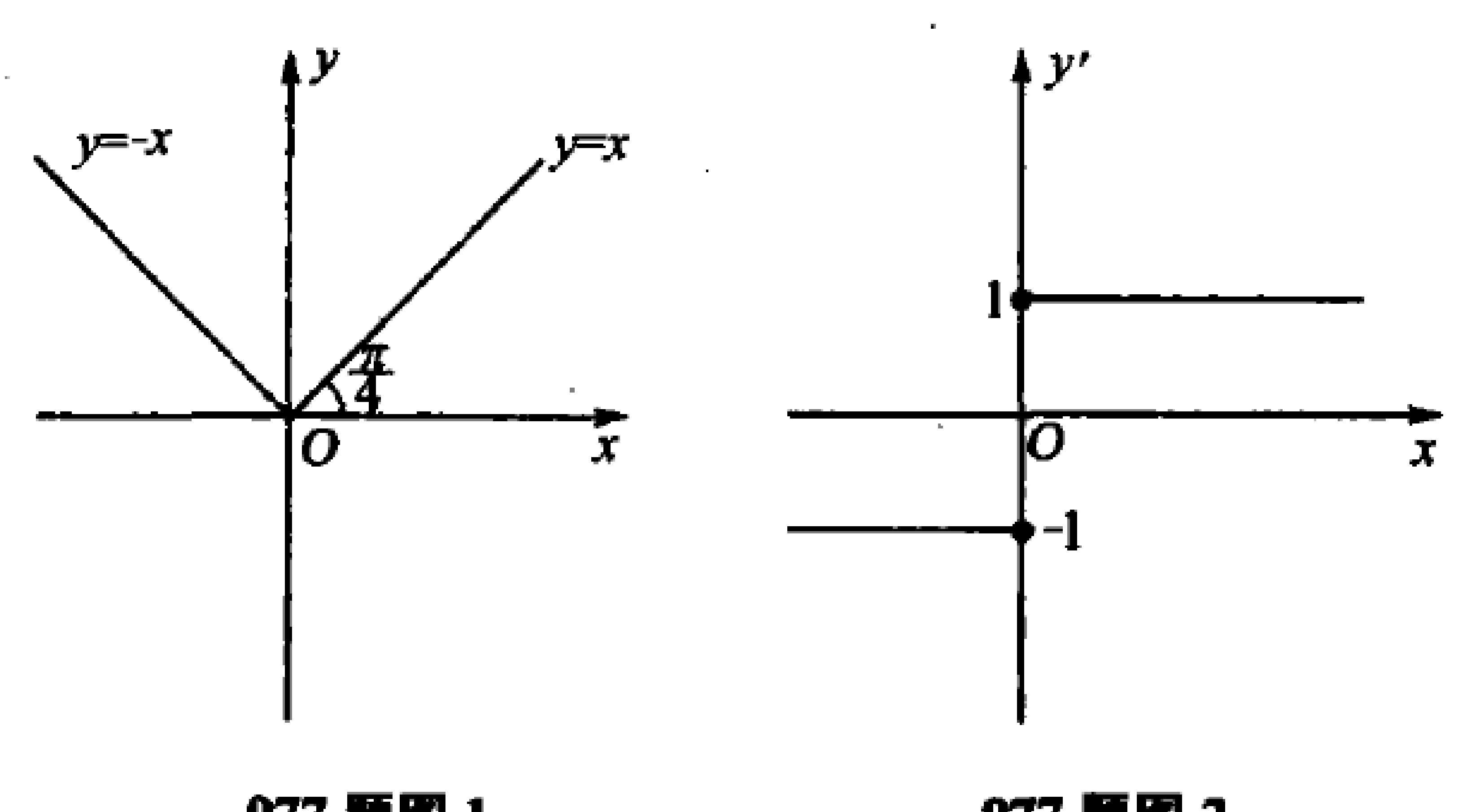
(1) $y=|x|$；(2) $y=x|x|$；(3) $y=\ln|x|$.

解　(1) $y=\begin{cases}x, & 当 x\geqslant 0 时,\\ -x, & 当 x<0 时,\end{cases}$

$$y'=\begin{cases}1, & 当 x>0 时,\\ -1, & 当 x<0 时,\end{cases}$$

即　$$y'=\frac{|x|}{x}\qquad (x\neq 0).$$

当 $x=0$ 时，y' 不存在. 如 977 题图 1 及 977 题图 2 所示



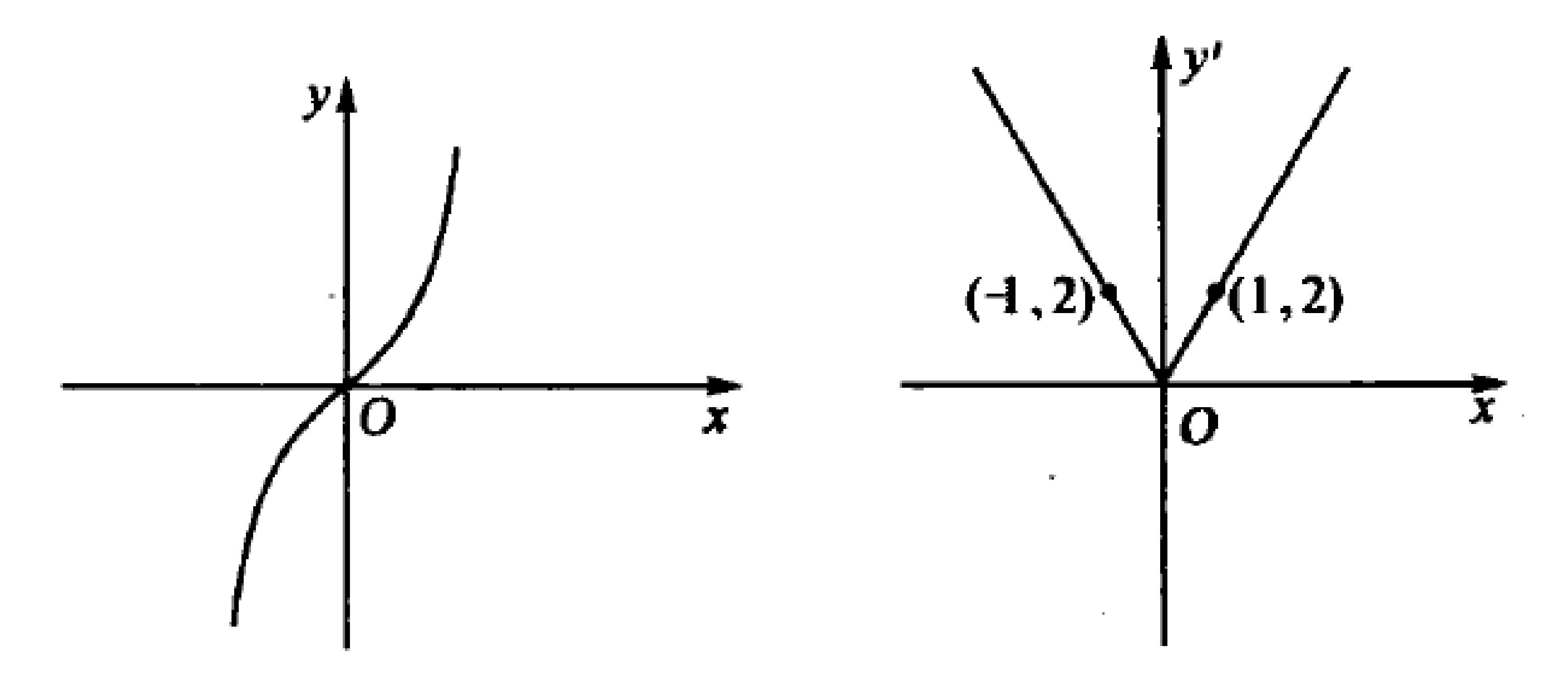
977 题图 1　　977 题图 2

(2) $y=\begin{cases}x^2, & \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时},\\ -x^2, & \text{当 } x<0 \text{ 时},\end{cases}$

$$y'=\begin{cases}2x, & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\\ -2x, & \text{当 } x<0 \text{ 时},\end{cases}$$

即 $\qquad y'=2|x|.$

如 977 题图 3 及 977 题图 4 所示

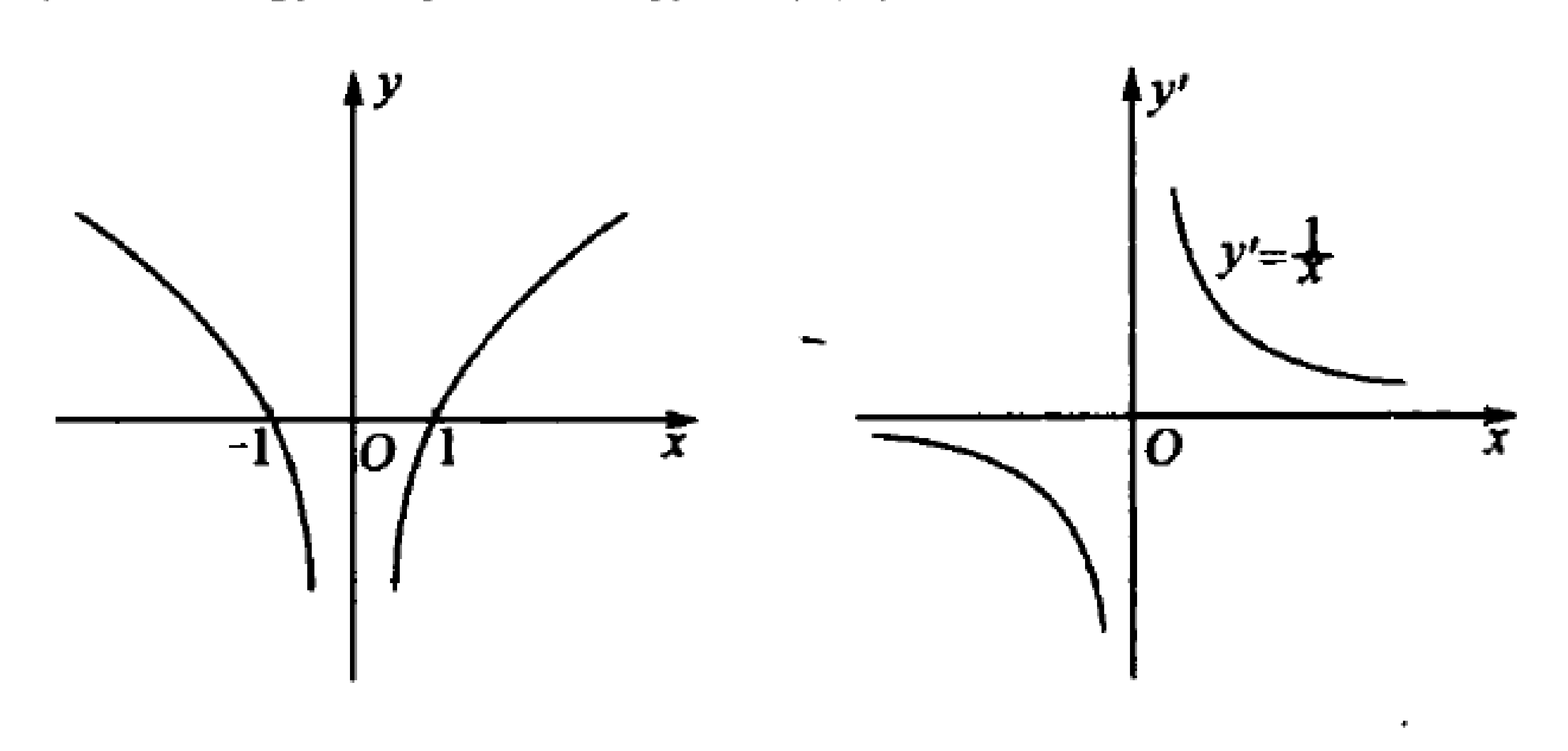


977 题图 3　　977 题图 4

(3) $y=\ln|x|$,

$$y'=\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=\frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

如 977 题图 5 及 977 题图 6 所示



977 题图 5　　977 题图 6

【978】 求出以下函数的导数:

(1) $y=|(x-1)^2(x+1)^3|$;

(2) $y=|\sin^3 x|$;

(3) $y=\arccos\frac{1}{|x|}$;

(4) $y=[x]\sin^2\pi x$.

解　(1) 由 977 题的结果有

$$y'=\frac{|(x-1)^2(x+1)^3|}{(x-1)^2(x+1)^3}\cdot[2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2]$$
$$=(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)\quad(x\neq\pm1).$$

而当 $x=\pm1$ 时,直接验证可得

$$y'(1)=y'(-1)=0,$$

满足上式.

因此　$y'=(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$.

(2) $y'=\frac{|\sin^3 x|}{\sin^3 x}3\sin^2 x\cos x=\frac{3}{2}\sin 2x\,|\sin x|$

$(x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

而当 $x=k\pi$ 时,直接验证可知

$$y'|_{k\pi}=0,$$

满足上式.

因此　$y'=\frac{3}{2}\sin 2x\,|\sin x|$.

(3) $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{|x|}{x}\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$(|x|>1)$.

(4) 当 $x\neq k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时,有

$$y'=[x]\cdot2\pi\cdot\sin\pi x\cdot\cos\pi=\pi\cdot[x]\cdot\sin(2\pi x).$$

当 $x=k$ 时,直接验证有

$$y'|_k=0,$$

满足上式.

因此　$y'=\pi[x]\cdot\sin(2\pi x)$.

求导函数并作出函数及其导函数的图形(979 ~ 983).

【979】 $y=\begin{cases}1-x, & \text{当} -\infty<x<1;\\ (1-x)(2-x), & \text{当} 1\leqslant x\leqslant 2;\\ -(2-x), & \text{当} 2<x<+\infty.\end{cases}$

解 显然有

$$y'=\begin{cases}-1, & \text{当} -\infty<x<1 \text{ 时},\\ 2x-3, & \text{当} 1<x<2 \text{ 时},\\ 1, & \text{当} 2<x<+\infty \text{ 时}.\end{cases}$$

而当 $x=1$ 时,右导数

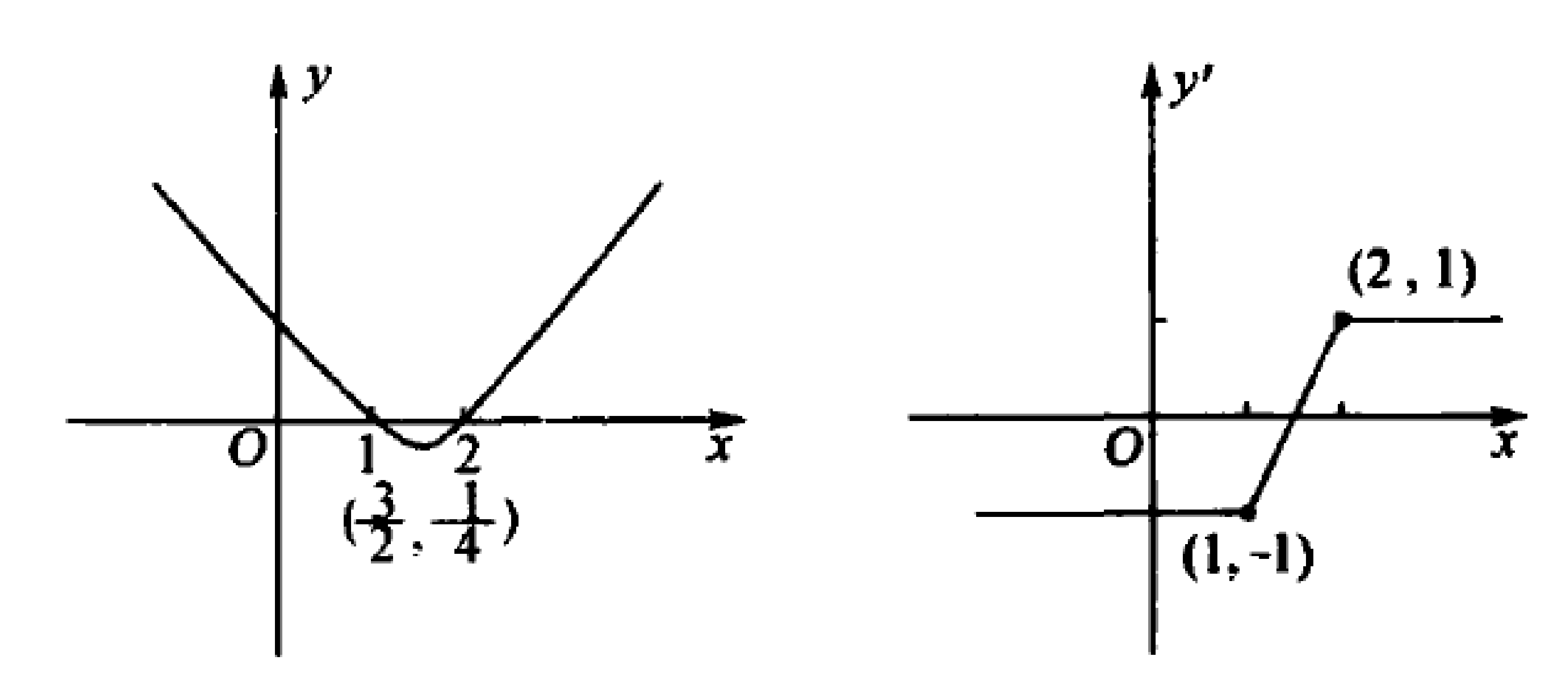
$$y'_+|_{x=1}=(2x-3)|_{x=1}=-1.$$

左导数 $y'_-|_{x=1}=-1$. 因此,在 $x=1$ 处,函数的导数存在,且 $y'|_{x=1}=1$.

同理 $\quad y'|_{x=2}=1$.

因此 $\quad y'=\begin{cases}-1, & \text{当} -\infty<x\leqslant 1 \text{ 时},\\ 2x-3, & \text{当} 1\leqslant x\leqslant 2 \text{ 时},\\ 1, & \text{当} 2<x<+\infty \text{ 时}.\end{cases}$

如 979 题图 1 及图 2 所示



979 题图 1　　　979 题图 2

【980】 $y=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2, & \text{当} a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & \text{在线段}[a,b]\text{之外}.\end{cases}$

解 $y'=\begin{cases}2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & \text{当} a<x<b \text{ 时},\\ 0, & \text{当} x<a \text{ 或} x>b \text{ 时},\end{cases}$

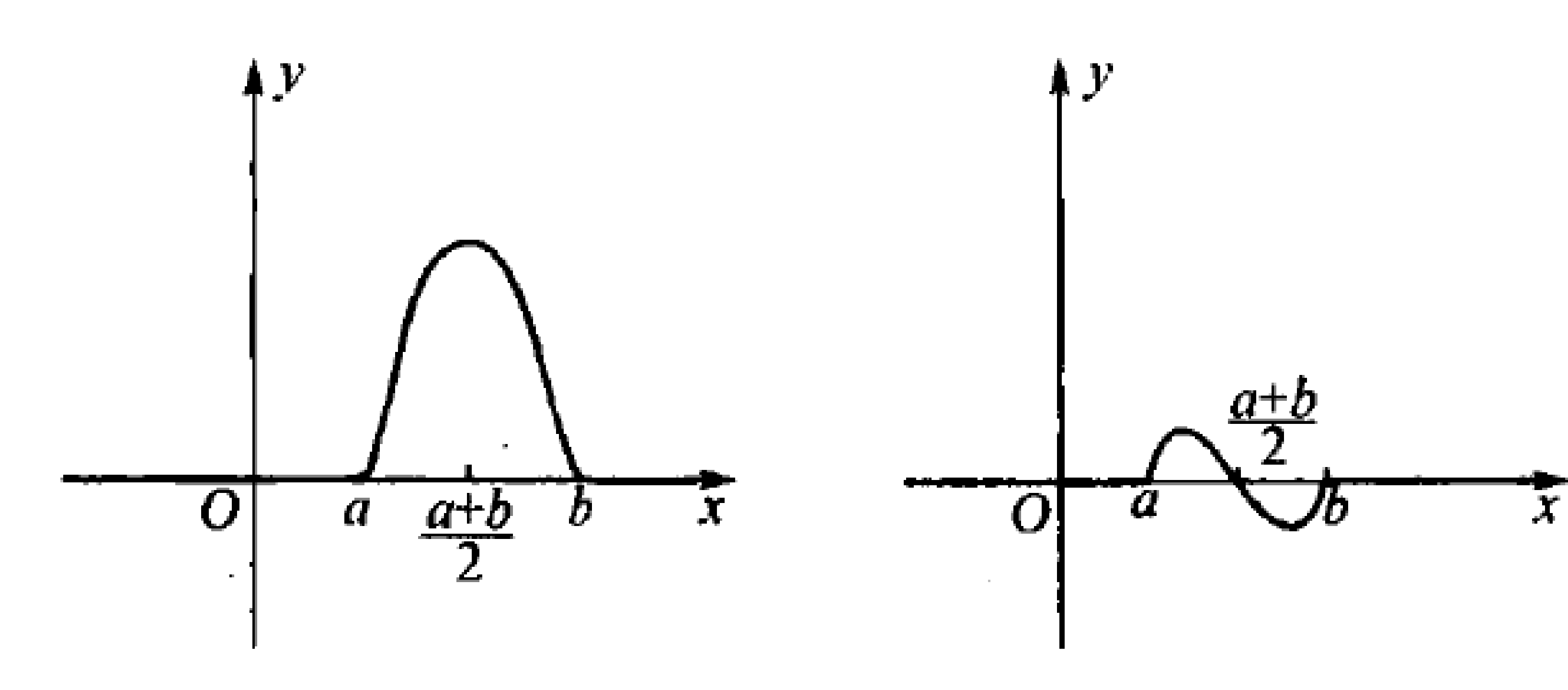
而在分段点 a. 右导数 $y'_+|_{x=a}=0$,左导数 $y'_-|_{x=a}=0$,因此,

$y'|_{x=a}=0$.

同样对分段点 b 进行讨论有 $y'|_{x=b}=0$.

因此 $$y'=\begin{cases}2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & 当 x\in[a,b] 时,\\ 0, & 当 x\notin[a,b] 时.\end{cases}$$

如 980 题图 1 及图 2 所示.



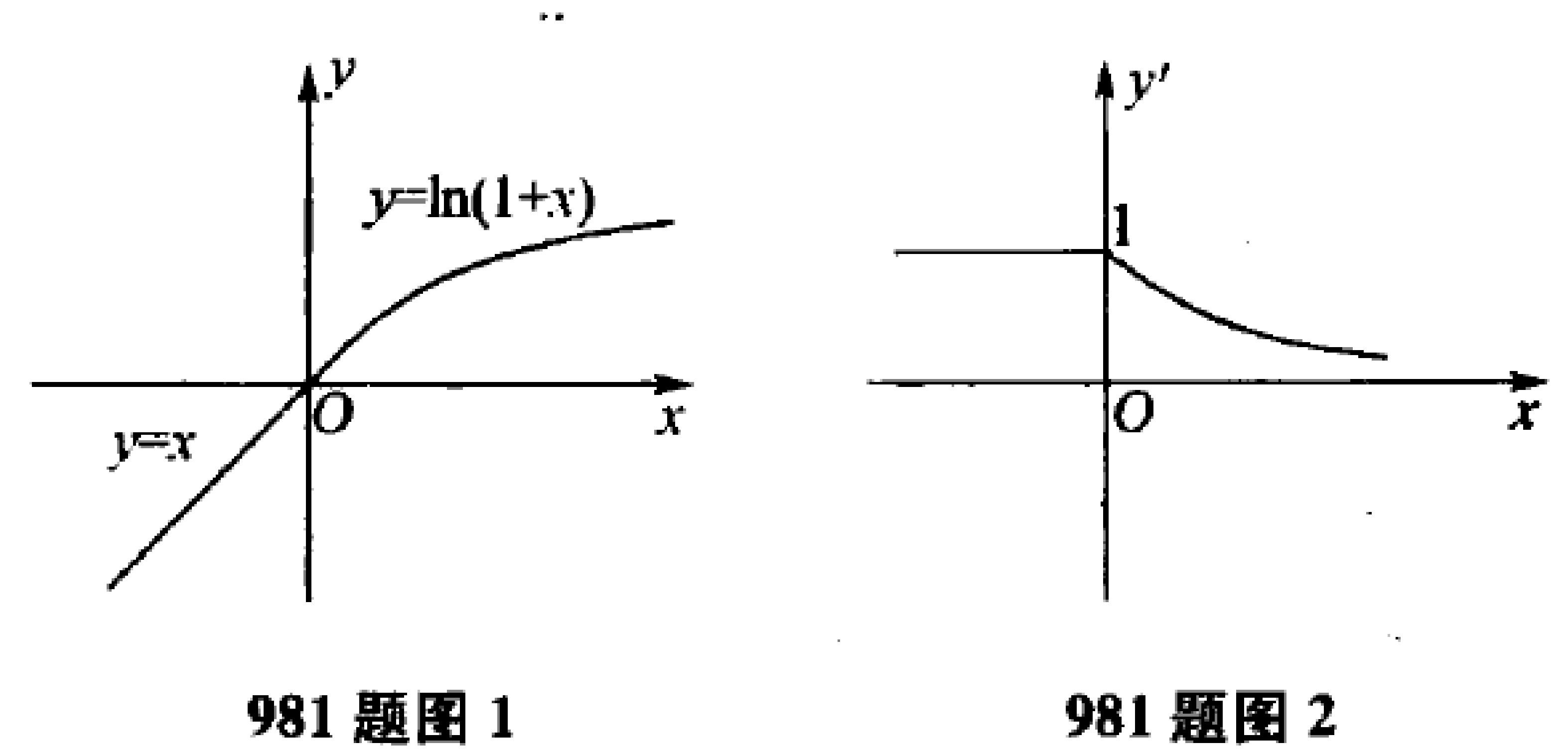
980 题图 1　　980 题图 2

【981】 $y=\begin{cases}x, & 当 x<0;\\ \ln(1+x), & 当 x\geqslant 0.\end{cases}$

解 分段求函数导数并对分段点 $x=0$ 进行讨论,得

$$y'=\begin{cases}1, & 当 x<0 时,\\ \dfrac{1}{1+x}, & 当 x\geqslant 0 时.\end{cases}$$

如图 981 题图 1 及图 2 所示



981 题图 1　　981 题图 2

【982】 $y=\begin{cases}\arctan x, & 当 |x|\leqslant 1;\\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x+\dfrac{x-1}{2}, & 当 |x|>1.\end{cases}$

解 $y' = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & 当 -1 < x < 1 时, \\ \dfrac{1}{2}, & 当 |x| > 1 时. \end{cases}$

在分段点 $x = 1$,

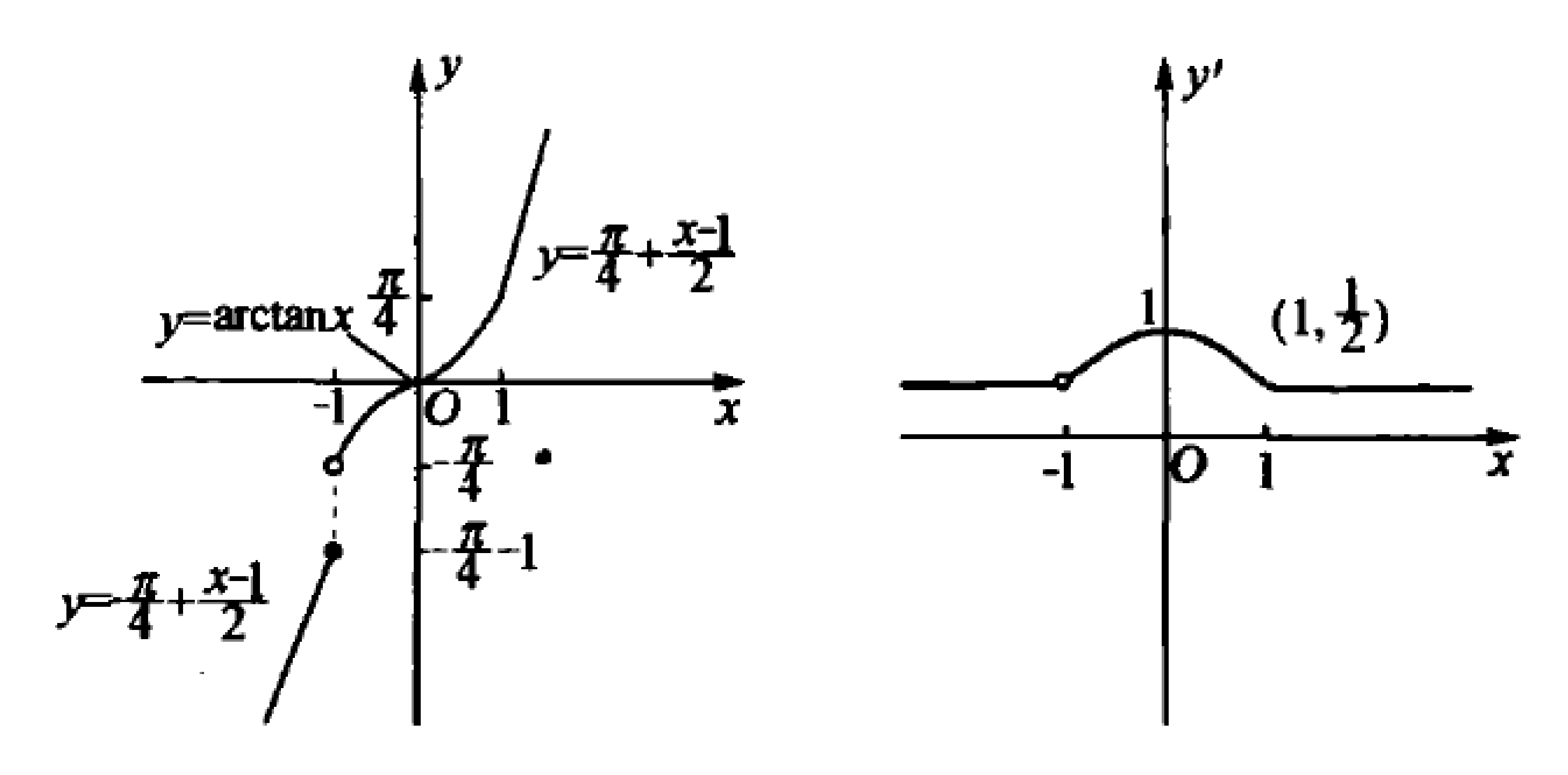
$$y'_+|_{x=1} = \frac{1}{2}, \qquad y'_-|_{x=1} = \left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=1} = \frac{1}{2},$$

故 $\quad y'|_{x=1} = \dfrac{1}{2}.$

在分段点 $x = -1$,函数不连续,故导数不存在. 因此

$$y' = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & 当 -1 < x \leqslant 1 时, \\ \dfrac{1}{2}, & 当 |x| > 1 时. \end{cases}$$

如图 982 题图 1 及图 2 所示



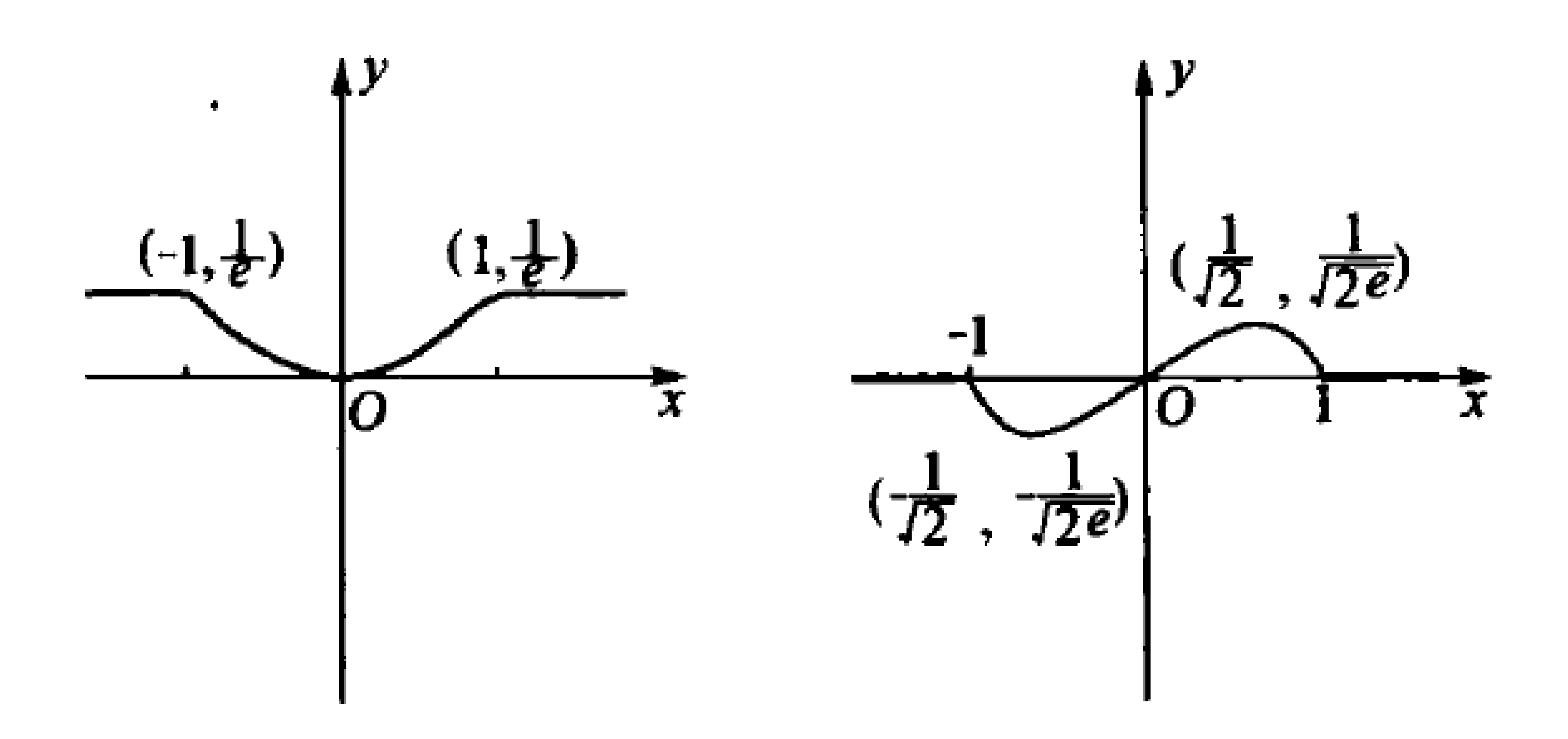
982 题图 1　　　　983 题图 2

【983】 $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & 当 |x| \leqslant 1; \\ \dfrac{1}{e}, & 当 |x| > 1. \end{cases}$

解 分段求函数的导数,并对分段点进行讨论,可得

$$y' = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1-x^2), & 当 |x| \leqslant 1 时; \\ 0, & 当 |x| > 1 时. \end{cases}$$

如图 983 题图 1 及图 2 所示



983 题图 1　　983 题图 2

【984】 由已知函数 $y=f(x)$ 的对数求得的导函数,称作此函数的对数导函数:

$$\frac{y'}{y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|f(x)|\equiv\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

求出函数 y 的对数导数,若:

(1) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

(2) $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$;

(3) $y=(x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\cdots(x-a_n)^{a_n}$;

(4) $y=(x+\sqrt{1+x^2})^n$.

解 (1) $\ln y=\ln|x|+\dfrac{1}{2}\ln|1-x|-\dfrac{1}{2}\ln|1+x|$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln y)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)},\qquad(0<|x|<1).$$

(2) $\ln y=2\ln|x|-\ln|1-x|+\dfrac{1}{3}\ln|3-x|-\dfrac{2}{3}\ln|3+x|$,

所以 $$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3}\frac{1}{3-x}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3+x}$$
$$=\frac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$$
$$(x\neq 0,x\neq 1,x\neq\pm 3).$$

(3) 应假设
$$(x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\cdots(x-a_n)^{a_n}>0,$$
$$\ln y=\sum_{i=1}^{n}a_i\ln|x-a_i|.$$

所以 $$\frac{d}{dx}(\ln y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x-a_i},\qquad (x\in\mathbf{R}),$$

其中 $$R=\left\{x\left|\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{a_i}>0\right.\right\}.$$

(4) $\ln y=n\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,

故 $$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

【985】 假设$\varphi(x)$和$\psi(x)$为x的可微函数,求出函数y的导函数.如果

(1) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$;

(2) $y=\arctan\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

(3) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$, $\qquad(\varphi(x)\neq 0;\psi(x)>0)$;

(4) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$, $\quad(\varphi(x)>0;\psi(x)>0)$.

解 (1) $$y'=\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$$
$$(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0).$$

(2) $$y'=\frac{1}{1+\dfrac{\varphi^2(x)}{\psi^2(x)}}\cdot\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)}$$

$$=\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}\qquad(\psi(x)\neq 0).$$

(3) 由于

$$y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}.$$

从而　$$\ln y=\frac{1}{\varphi(x)}\ln\psi(x),$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\varphi(x)-\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)},$$

因此　$$y'=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left\{\frac{1}{\varphi(x)}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)\right\}.$$

(4) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)=\dfrac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}$,

所以　$$y'=\frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\cdot\ln\varphi(x)-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$$

$$=\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{1}{\ln\varphi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}.$$

【986】 若

(1) $y=f(x^2)$;

(2) $y=f(\sin^2x)+f(\cos^2x)$;

(3) $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$;

(4) $y=f\{f[f(x)]\}$.

其中 $f(u)$ 为可微分的函数. 求 y'.

解 (1) $y'=2xf'(x^2)$.

(2) $y'=2\sin x\cos xf'(\sin^2x)-2\sin x\cos xf'(\cos^2x)$

$=\sin 2x[f'(\sin^2x)-f'(\cos^2x)]$.

(3) $y'=e^x\cdot f'(e^x)\cdot e^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}\cdot f'(x)$

$=e^{f(x)}[e^xf'(e^x)+f'(x)f(e^x)]$.

(4) $y'=f'(x)\cdot f'[f(x)]\cdot f'\{f[f(x)]\}$.

【986.1】 若 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-1000)$ 求 $f'(0)$.

解 $$f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-1000)+x[(x-1)(x-2)\cdots(x-1000)]',$$

故 $$f'(0)=(-1)(-2)\cdots(-1000)+0=(-1)^{1000}1000!=1000!.$$

【987】 证明:n 阶行列式的微分法:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

证 法一:利用行列式的定义直接证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1 j_2\cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x)\cdots f_{nj_n}(x)$$

$$=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1 j_2\cdots j_n)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x)\cdots f_{nj_n}(x)]$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}\sum_{k=1}^{n}f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots f'_{kj_k}(x)\cdots f_{nj_n}(x)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots f'_{kj_k}(x)\cdots f_{nj_n}(x)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

其中 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数

$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和.

法二:利用数学归纳法证明

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_{11}(x)f_{22}(x)-f_{12}(x)f_{21}(x)]$$

$$=f'_{11}(x)f_{22}(x)-f'_{12}(x)f_{21}(x)+f_{11}(x)f'_{22}(x)$$
$$-f_{12}(x)f'_{21}(x)$$

$$=\begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix},$$

即等式当 $n=2$ 时成立.

现假设等式当 $n=k$ 时成立,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{ik}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{i1}(x) & f'_{i2}(x) & \cdots & f'_{ik}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix},$$

现证等式当 $n=k+1$ 时也成立. 事实上

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+11}(x) & f_{k+12}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+j+1}f_{k+1j}(x)$$

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & \cdots & f_{ij-1}(x) & f_{ij+1}(x) & \cdots & f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x) & \cdots & f_{kk+1}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+j+1}f'_{k+1j}(x)$$

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & \cdots & f_{ij-1}(x) & f_{ij+1}(x) & \cdots & f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x) & \cdots & f_{kk+1}(x) \end{vmatrix}$$

$$+\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+j+1}f_{k+1j}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & \cdots & f_{ij-1}(x) & f_{ij+1}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x) & \cdots & f_{kk+1}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kk+1}(x) \\ f'_{k+11}(x) & \cdots & f'_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix}$$

$$+ \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} f_{k+1j}(x) \sum_{i=1}^{k}$$

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{i1}(x) & \cdots & f'_{ij-1}(x) & f'_{ij+1}(x) & \cdots & f'_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1} & \cdots & f_{kk+1}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kk+1}(x) \\ f'_{k+11}(x) & \cdots & f'_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix}$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} f_{k+1j}(x)$$

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{i1}(x) & \cdots & f'_{ij-1}(x) & f'_{ij+1}(x) & \cdots & f'_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x) & \cdots & f_{kk+1}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{i1}(x) & \cdots & f'_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+11}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix},$$

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

因此由数学归纳法,等式对一切自然数 n 均成立.

【988】 若

$$F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix},\text{求 } F'(x).$$

解 $$F'(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x^2+x+9)+(x^2-1+4)+(x^2-x+3)$$

$$=3(x^2+5).$$

【989】 若

$$F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix},\text{求 } F'(x).$$

解 $$F'(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=0+0+6(2x^2-x^2)=6x^2$$

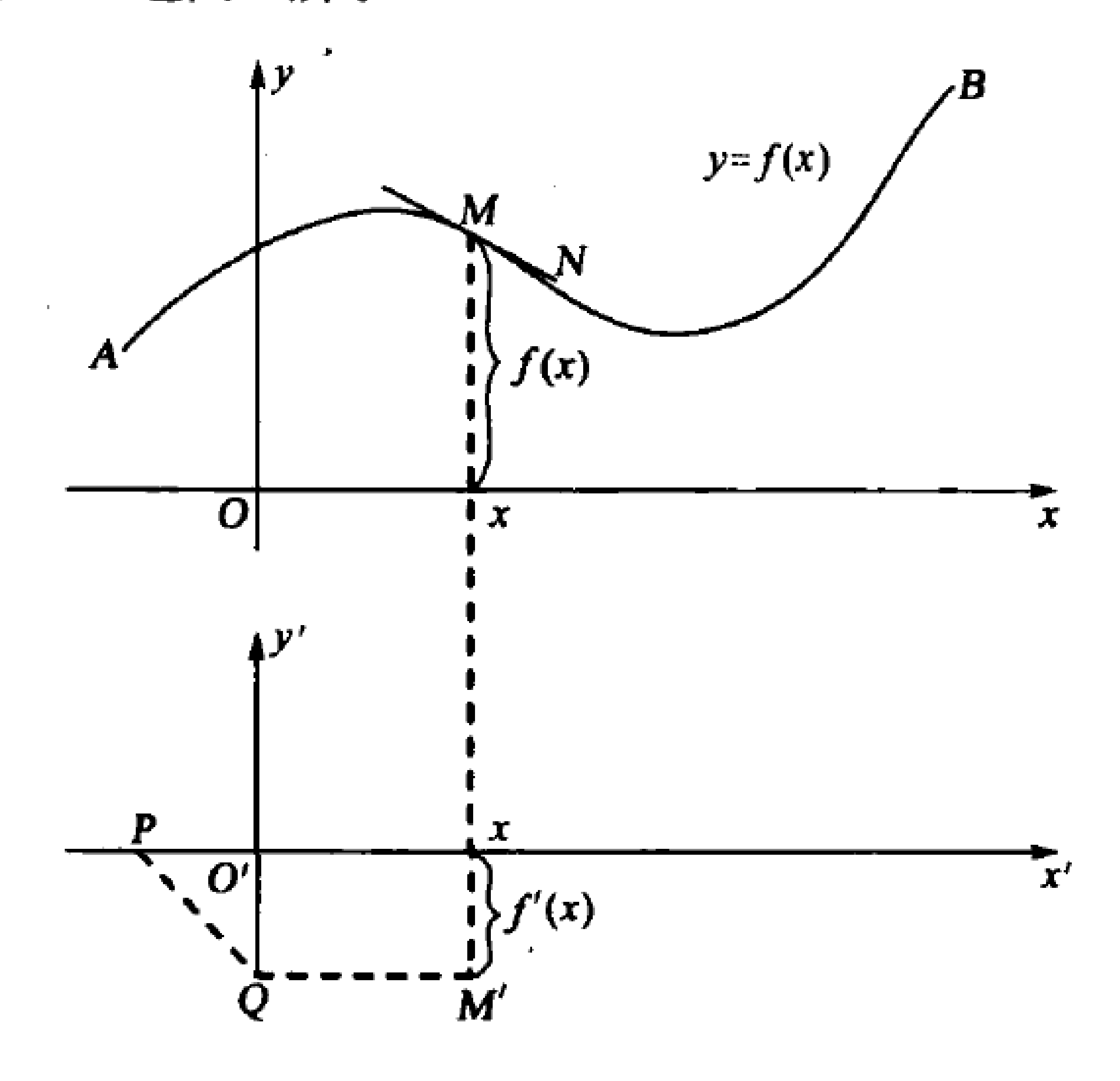
【990】 已知函数的图形. 近似地作出它的导函数图形.

解 先由所给曲线 $y=f(x)$ 上一点 M, 作出曲线 $y=f'(x)$ 上的对应点 M'. 作法如下:

在曲线 $y=f(x)$ 上任取一点 $M(x,f(x))$, 并作曲线在点 M 处的切线 MN, 过点 $P(-1,0)$ 作平行 MN 的直线 PQ 交 Oy 轴于点 Q, 于是

$$O'Q=\tan\alpha=f'(x),$$

过点 Q 作平行于 Ox 轴的直线, 与过点 $(x,0)$ 且垂直于 Ox 轴的直线交于 M', 则 M' 的坐标为 $(x,f'(x))$, 即 M' 是曲线 $y=f'(x)$ 上的点. 如 990 题图 1 所示



990 题图 1

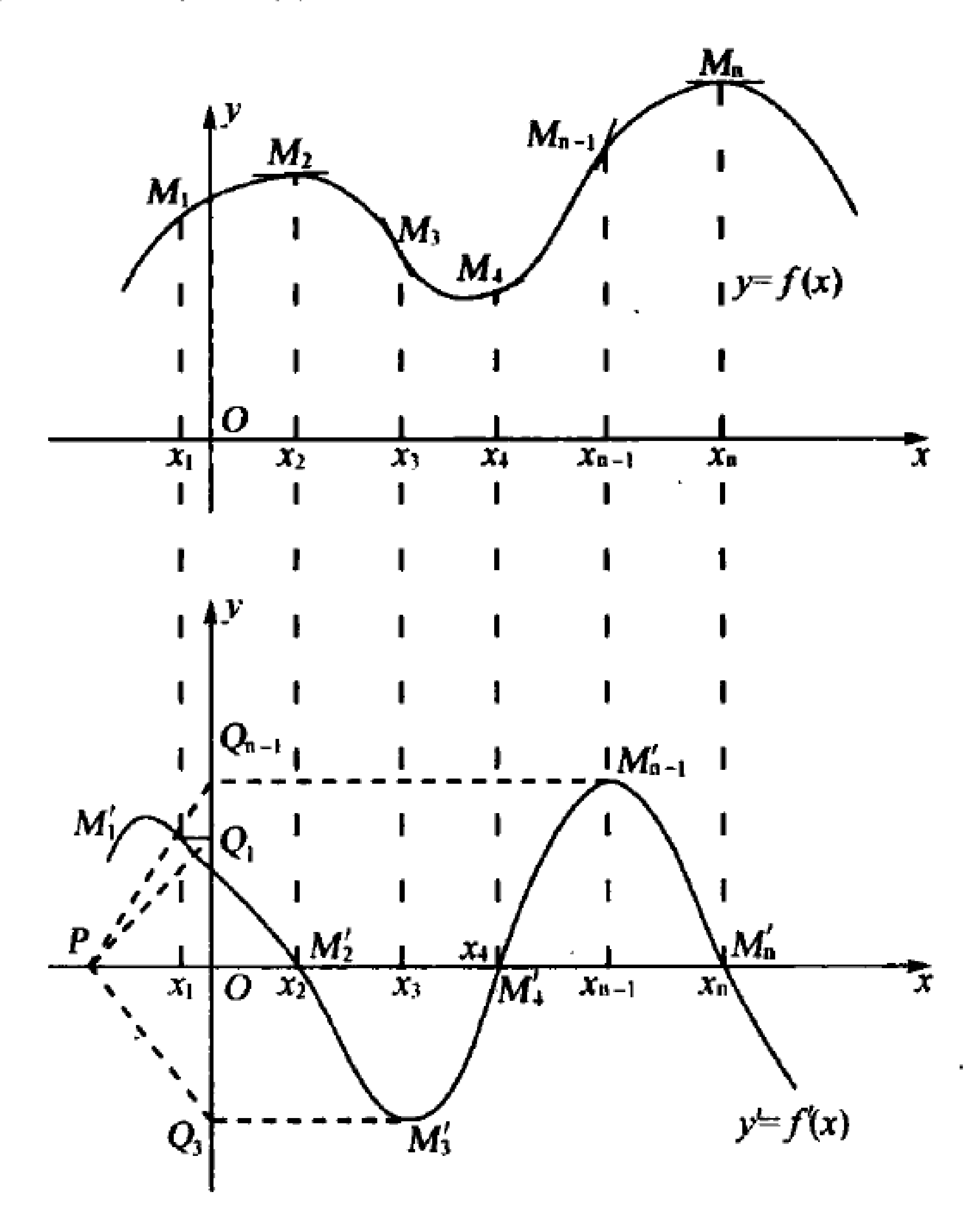
由此, 在曲线 $y=f(x)$ 上取若干点

$$M_i(x_i,f(x_i)) \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

按上述方法作出曲线 $y=f'(x)$ 上相应的点

$$M'_i(x_i,f'(x_i)) \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

最后用光滑的曲线连接 $M'_1, M'_2, \cdots, M'_n$，得到的曲线即为 $y = f'(x)$. 如 990 题图 2 所示



990 题图 2

【991】 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0, \\ 0, & \text{当 } x=0. \end{cases}$$

具有不连续的导函数.

证 当 $x \neq 0$ 时，

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

而
$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0,$$

故 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处存在.

但 $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ 不存在. 所以 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 处不连续. 这说明了 $f(x)$ 有不连续的导函数.

【992】 问在什么条件下函数

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & (x \neq 0); \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(1) 在 $x = 0$ 处是连续的;(2) 在 $x = 0$ 处可微分;(3) 在 $x = 0$ 处具有连续导数?

解 (1) 当 $n > 0$ 时,

$$\lim_{x \to 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0,$$

于是 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$,

即当 $n > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(2) 当 $n > 1$ 时,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} \sin \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

于是 $f'(0) = 0$. 因此当 $n > 1$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可微.

(3) 当 $n > 2$ 时,

$$f'(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0),$$

$$f'(0) = 0,$$

故 $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$.

即当 $n > 2$ 时, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

【993】 问在什么条件下函数

$$f(x) = |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m} (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0 (m > 0),$$

(1) 在坐标原点的邻域内具有有界导数;

(2) 在该域上具有无界导数?

解 (1) 当 $x\neq 0, x\in(-\delta,\delta)$ 时($\delta>0$),

$$f'(x)=n\mid x\mid^{n-1}\frac{\mid x\mid}{x}\sin\frac{1}{\mid x\mid^m}-\frac{m}{\mid x\mid^{m+1}}\cdot\frac{\mid x\mid}{x}\mid x\mid^n\cdot\cos\frac{1}{\mid x\mid^m}$$

$$=\frac{\mid x\mid}{x}\left[n\mid x\mid^{n-1}\sin\frac{1}{\mid x\mid^m}-m\mid x\mid^{n-m-1}\cos\frac{1}{\mid x\mid^m}\right],$$

由于$\dfrac{\mid x\mid}{x},\sin\dfrac{1}{\mid x\mid^m},\cos\dfrac{1}{\mid x\mid^m}$ 均为有界函数.

故当 $n\geqslant m+1$ 时,$f'(x)$ 在$(-\delta,\delta)$ 内有界(此时 $f'(0)=0$).

(2) 在此域上,当$n-m-1<0$,即 $n<m+1$ 时,$f'(x)$ 为无界,另一方面当 $n>1$ 时 $f'(0)$ 才存在.

因此,当$1<n<m+1$时,$f'(x)$ 在$(-\delta,\delta)$ 内存在且为无界函数.

【994】 若 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$,

其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处是连续的.求 $f'(a)$.

解 $$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\varphi(a+\Delta x)-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a).$$

【995】 证明:函数

$$f(x)=\mid x-a\mid\varphi(x),$$

(其中 $\varphi(x)$ 为连续函数,且 $\varphi(a)\neq 0$) 在点 a 无导数.

问单侧导数 $f'_-(a)$ 和 $f'_+(a)$ 等于多少?

证 因为

$$f'_-(a)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\mid\Delta x\mid\cdot\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}[-\varphi(a+\Delta x)]=-\varphi(a),$$

$$f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to +0} \varphi(a+\Delta x) = \varphi(a).$$

由于 $\varphi(a) \neq 0$,故 $f'_-(a) \neq f'_+(a)$.

因此 $f(x)$ 在点 a 没有导数.

【996】 请举出在已知点:$a_1, a_2, \cdots a_n$ 没有导数的连续函数的实例.

解 因为 $y = |x-a|$ 在点 a 处连续且无导数.

故 $$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x-a_i|,$$

及 $$g(x) = \prod_{i=1}^{n} |x-a_i|,$$

均为在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 连续且在这些点不可导的函数.

【997】 证明:函数

$$f(x) = x^2 \left|\cos\frac{\pi}{x}\right| (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0,$$

在点 $x=0$ 的任何邻域内具有不可微分点,但在点 $x=0$ 是可微分的.

绘制此函数的简图.

证 对于函数 $f(x)$,我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{x} = 0.$$

故 $f'(0) = 0$,即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是可微的.

令 $$x_n = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$

因为 $$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{a+t}-\left(\frac{1}{a}-\frac{t}{a^2}\right)}{t} = 0,$$

即 $$\frac{1}{a+t} = \frac{1}{a} - \frac{t}{a^2} + o(t) \qquad (a \neq 0),$$

从而 $f'_-(x_{2n})$

$$= \lim_{\Delta x \to -0}\frac{f(x_{2n}+\Delta x)-f(x_{2n})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_{2n}+\Delta x)^2 \left|\cos \frac{\pi}{x_{2n}+\Delta x}\right| - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_{2n}+\Delta x)^2 \left|\cos\pi\left(\frac{1}{x_{2n}} - \frac{\Delta x}{x_{2n}^2} + o(\Delta x)\right)\right|}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_{2n}+\Delta x)^2 \left|\sin\left(\frac{\Delta x}{x_{2n}^2}\pi - o(\Delta x)\right)\right|}{\Delta x} = -\pi.$$

同样 $\quad f'_+(x_{2n}) = \pi.$

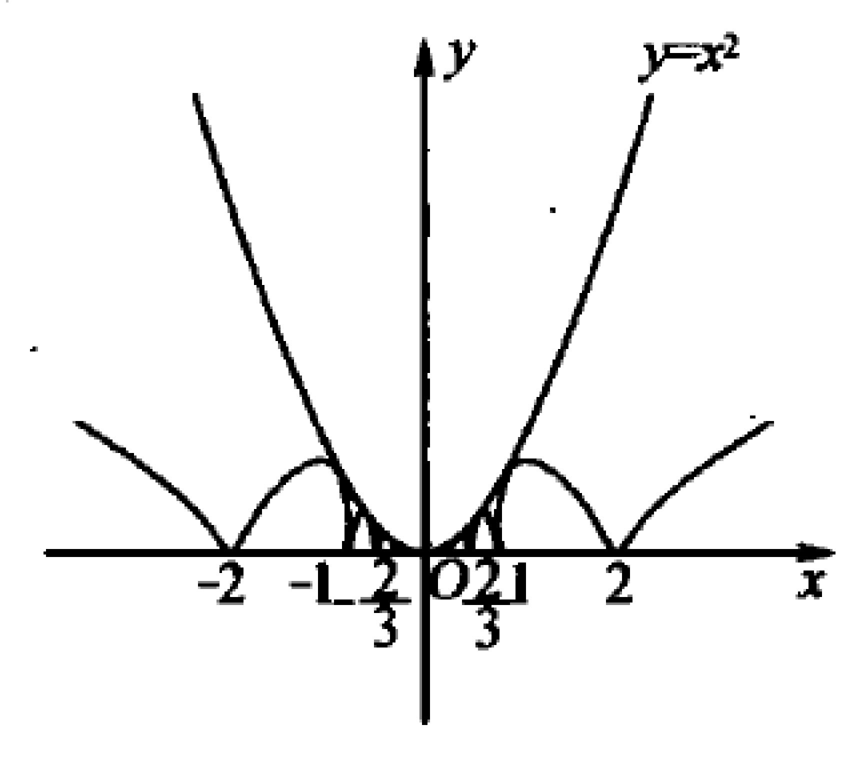
所以 $\quad f'_-(x_{2n}) \neq f'_+(x_{2n}).$

同样可证 $f'_-(x_{2n+1}) \neq f'_+(x_{2n+1}).$

因此,$f(x)$ 在点 x_n 处不可微,而对于 $x=0$ 的任何邻域$(-\delta,\delta)$,当 n 充分大时,总有 $0 < x_n < \delta$,即 $x_n \in (-\delta,\delta)$.

故在 $x=0$ 的任何邻域内都有不可微的点.函数的图形在 Ox 轴的上方,在曲线 $y=x^2$ 的下方.当 $x=\frac{2}{2n+1}$ 时,$f(x)=0$,且 $f'(x)$ 不存在.

如 997 题图所示



997 题图

【998】 证明:函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数}; \end{cases}$$

仅在 $x=0$ 时有导数.

证　$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}\Delta x, & \text{当 } \Delta x \text{ 为有理数时;}\\ 0, & \text{当 } \Delta x \text{ 为无理数时.}\end{cases}$$

于是　$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0,$$

其次，当 $x\neq 0$ 时，我们分两种情况讨论.

(1) x 为有理数，取一无理数序列 $\{x_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x,$$

则　$$\lim_{x_n\to x}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=\lim_{x_n\to x}\frac{0-x^2}{x_n-x}=\infty.$$

所以，$f(x)$ 在任一有理数点 $x(\neq 0)$ 处不可微.

(2) x 为无理数，取一有理数序列，$\{x'_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}x'_n=x,$$

从而　$$\lim_{x'_n\to x}\frac{f(x'_n)-f(x)}{x'_n-x}=\lim_{x'_n\to x}\frac{x'^2_n}{x'_n-x}=\infty.$$

所以，$f(x)$ 在任一无理数点 x 处不可微.

综上所述，$f(x)$ 仅在 $x=0$ 处有导数.

【999】　研究以下函数的可微性：

(1) $y=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$;

(2) $y=|\cos x|$;

(3) $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$;

(4) $y=\arcsin(\cos x)$;

(5) $y=\begin{cases}\dfrac{x-1}{4}(x+1)^2, & \text{当 } |x|\leqslant 1;\\ |x|-1, & \text{当 } |x|>1.\end{cases}$

解　(1) 当 $x\neq 1,2,3$ 时函数可微，

现考察在 1,2,3 这三点的可微性.

① 当 $x=1$ 时，由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}|(\Delta x-1)^2(\Delta x-2)^3|,$$

故　$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=8,\ \lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-8.$$

因此$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$不存在. 即函数 y 在 $x=1$ 处不可微.

② 当 $x=2$ 时,由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x\mid(\Delta x+1)(\Delta x-1)^3\mid,$$

所以 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

因而 y 在 $x=2$ 处可微且 $y'\mid_{x=2}=0$.

③ 当 $x=3$ 时,由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x\mid\Delta x\mid\mid(\Delta x+2)(\Delta x+1)^2\mid,$$

所以 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

因而 y 在 $x=3$ 处可微,且 $y'\mid_{x=3}=0$.

(2) 当 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时函数可微. 而在点 $x_{2n}=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ 有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left|\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)\right|}{\Delta x}=\frac{\mid-\sin\Delta x\mid}{\Delta x},$$

因而 $$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1,$$

即函数 y 在 x_{2n} 处不可微.

同理可得 y 在 $x_{2n+1}=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{2}$ 处也不可微.

因此 $y=\mid\cos x\mid$ 在 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处不可微.

(3) 当 $x\neq\pm\pi$ 时,$y=\mid\pi^2-x^2\mid\sin^2 x$ 可微.

下面讨论在 $x=\pi$ 及 $x=-\pi$ 处的可微性.

当 $x=\pi$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\pi^2-(\pi+\Delta x)^2|\sin^2(\pi+\Delta x)-0}{\Delta x}$$

$$=\frac{\sin^2\Delta x\,|2\pi\Delta x+(\Delta x)^2|}{\Delta x},$$

所以 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.$$

因此，函数 y 在 $x=\pi$ 处可微.

同样可证函数 y 在 $x=-\pi$ 处可微.

因此，$y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可微.

(4) $y=\arcsin(\cos x)$ 在 $|\cos x|=1$ 的点不可微，即在 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处不可微.

(5) 当 $x\neq\pm1$ 时，函数 y 可微.

下面我们讨论当 $x=1$ 及 $x=-1$ 时函数的可微性.

当 $x=1$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\frac{\Delta x}{4}(\Delta x+2)^2}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{|\Delta x+1|-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

所以函数 y 在 $x=1$ 处可微.

当 $x=-1$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{|-1+\Delta x|-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\frac{(-1+\Delta x-1)}{4}\cdot(\Delta x)^2}{\Delta x}=0.$$

所以，函数 y 在 $x=-1$ 处不可微.

求下列函数 $f(x)$ 的左侧导数和右侧导数(1000 ~ 1008).

【1000】 $f(x)=|x|$.

解 当 $x\neq 0$ 时，

$f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)=\operatorname{sgn}x$,

当 $x=0$ 时，

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0;\\ -1, & \Delta x<0.\end{cases}$$

所以 $\quad f'_{+}(0)=1, f'_{-}(0)=-1.$

【1001】 $f(x)=[x]\sin\pi x.$

解 当 $k<x<k+1$ 时($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)，

$$f'_{-}(x)=f'_{+}(x)=k\pi\cos\pi x;$$

当 $x=k$ 时($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)，有

$$\begin{aligned}f'_{+}(k)&=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{[k+\Delta x]\sin\pi(k+\Delta x)-0}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{(k+\Delta x)(-1)^k\sin(\pi\Delta x)}{\Delta x}\\&=(-1)^k k\pi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'_{-}(k)&=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{(k-1+\Delta x)\sin\pi(k-1+\Delta x)}{\Delta x}\\&=(-1)^{k-1}(k-1)\pi.\end{aligned}$$

【1002】 $f(x)=x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|\ (x\neq0), f(0)=0.$

解 当 $\cos\dfrac{x}{\pi}\neq0$，即 $x\neq\dfrac{2}{2k+1}$ 时($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)，

$$\begin{aligned}f'_{+}(x)&=f'_{-}(x)\\&=\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|+\frac{\pi}{x}\frac{\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{\cos\frac{\pi}{x}}\cdot\sin\frac{\pi}{x}\\&=\left(\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right);\end{aligned}$$

当 $x=\dfrac{2}{2k+1}$ 时($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)，

设 $x_k=\dfrac{2}{2k+1}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，

由于 $\dfrac{1}{a+t}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{t}{a^2}+o(t)\qquad(t\to0)$，

我们有

$$f'_+(x_k)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{(x_k+\Delta x)\left|\cos\frac{\pi}{x_k+\Delta x}\right|}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{(x_k+\Delta x)\left|\cos\left[\frac{\pi}{x_k}-\frac{\Delta x\pi}{x_k^2}+o(\Delta x)\right]\right|}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{(x_k+\Delta x)\left|\cos\left[k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\Delta x}{x_k^2}\pi+o(\Delta x)\right]\right|}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{(x_k+\Delta x)\left|\sin\left(\frac{\Delta x\pi}{x_k^2}+o(\Delta x)\right)\right|}{\Delta x}$$

$$=\frac{\pi}{x_k}=\frac{2k+1}{2}\pi.$$

同理 $$f'_-(x_k)=-\frac{2k+1}{2}\pi,$$

即 $$f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)=\frac{2k+1}{2}\pi,$$

$$f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right)=-\frac{2k+1}{2}\pi.$$

【1003】 $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$.

解 当$\sqrt{2k\pi}<|x|<\sqrt{(2k+1)\pi}(k=0,1,2,\cdots)$时，

$$f'_+(x)=f'_-(x)=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

当$x=0$时，

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sqrt{\sin\Delta x^2}}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(0\Delta+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\sqrt{\sin\Delta x^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}-\frac{\sqrt{\sin\Delta x^2}}{\Delta x^2}=-1.$$

当 $x=\sqrt{2k\pi}(k=1,2,\cdots)$,

$$f'_+(\sqrt{2k\pi})=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(\sqrt{2k\pi}+\Delta x)-f(\sqrt{2k\pi})}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi}+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sqrt{\sin[2\Delta x\sqrt{2k\pi}+(\Delta x)^2]}}{\Delta x}$$

$$=+\infty.$$

同样 $f'_-(\sqrt{(2k+1)\pi})=-\infty$,

$f'_-(-\sqrt{2k\pi})=-\infty$,

$f'_+(-\sqrt{(2k+1)\pi})=+\infty$.

$f'_-(\sqrt{2k\pi}),f'_+(\sqrt{(2k+1)\pi}),f'_+(-\sqrt{2k\pi}),f'_-(-\sqrt{(2k+1)\pi})$ 均不存在$(k=1,2,\cdots)$.

【1004】 $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}(x\neq0),f(0)=0$.

解 当 $x\neq0$ 时,

$$f'_+(x)=f'_-(x)=\frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}.$$

当 $x=0$ 时,

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\frac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}1+\frac{1}{e^{\frac{1}{\Delta x}}}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=1.$$

【1005】 $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

解　当 $x \neq 0$ 时，

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

当 $x = 0$ 时，

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}.$$

$$= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\sqrt{1-e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\sqrt{1-e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = 1,$$

同样可求得 $f'_-(0) = -1$.

【1006】 $f(x) = |\ln|x||$　　$(x \neq 0)$.

解　$$f(x) = \begin{cases} \ln|x|, & 当 |x| > 0 时; \\ 0, & 当 |x| = 1 时; \\ -\ln|x|, & 当 0 < |x| < 1 时. \end{cases}$$

所以当 $0 < |x| < 1$ 时，

$$f'_+(x) = f'_-(x) = -\frac{1}{x}.$$

当 $|x| > 1$ 时，

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{1}{x}.$$

当 $|x| = 1$ 时，

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\ln|1+\Delta x|}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to -0} \ln|(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}|$$

$$= -\ln e = -1.$$

同理可求 $f'_+(-1) = 1, f'_-(-1) = -1$.

【1007】 $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

解 当 $|x|\neq 1$ 时，

$$f'_+(x)=f'_-(x)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}$$
$$=\frac{2}{1+x^2}\operatorname{sgn}(1-x^2).$$

当 $x=1$ 时，

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\arcsin\frac{2(1+\Delta x)}{1+(1+\Delta x)^2}-\arcsin 1}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\arcsin\frac{1-(1+\Delta x)^2}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\arcsin\frac{1-(1+\Delta x)^2}{1+(1+\Delta x)^2}}{\frac{1-(1+\Delta x)^2}{1+(1+\Delta x)^2}}\cdot\frac{\frac{1-(1+\Delta x)^2}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$
$$=-1,$$

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\arcsin\frac{2(1+\Delta x)}{1+(1+\Delta x)^2}-\arcsin 1}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\arcsin\frac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\arcsin \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\frac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}} \cdot \frac{\frac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$= 1.$$

同理可求$f'_+(-1) = 1, f'_-(-1) = -1$.

【1008】 $f(x) = (x-2)\arctan\frac{1}{x-2}(x \neq 2), f(2) = 0.$

解 当$x \neq 2$时,

$$f'_-(x) = f'_+(x)$$

$$= \arctan\frac{1}{x-2} + \frac{x-2}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2}\left[-\frac{1}{(x-2)^2}\right]$$

$$= \arctan\frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{(x-2)^2+1}.$$

当$x = 2$时,

$$f'_+(2) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to +0} \arctan\frac{1}{\Delta x} = \frac{\pi}{2},$$

$$f'_-(2) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \arctan\frac{1}{\Delta x} = -\frac{\pi}{2}.$$

【1009】 当$x \neq 0$时函数$f(x) = x\sin\frac{1}{x}$及$f(0) = 0$,证明:$f(x)$在$x = 0$处连续,但在此点既无左侧导数,又无右侧导数.

证 因为

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

所以,$f(x)$在$x = 0$点连续.

其次,因为

$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \sin\frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x}.$$

显然 $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ 及 $\lim\limits_{\Delta x\to-0}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$ 均不存在. 因此, $f(x)$ 在 $x=0$ 点即无左导数也无右导数.

【1009.1】 设 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类不连续点,

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to-0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-0)}{h},$$

及
$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to+0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h},$$

称作函数 $f(x)$ 在点 x_0 的广义单侧导数(相应地为左、右侧).

求函数 $f(x)$ 在不连续点 x_0 处的 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$. 若:

(1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+x^3}{x}}$;

(2) $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

解 (1) $x=0$ 为 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}$ 的不连续点,且为第一类不连续点.

$$f(0+0)=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}=\lim_{x\to+0}\sqrt{1+x}=1,$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}=\lim_{x\to-0}(-\sqrt{1+x})=-1,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的广义左侧导数

$$f'_-(0)=\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0-0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{\frac{\sqrt{h^2+h^3}}{h}+1}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{1-\sqrt{1+h}}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{-h}{h(1+\sqrt{1+h})}=-\frac{1}{2}.$$

广义右侧导数为

$$f'_+(0)=\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0+0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{\frac{\sqrt{h^2+h^3}}{h}-1}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{1}{2}.$$

注：原题误为 $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+x^3}{x}}$，此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 的左侧无定义.

(2) $x=1$ 为 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 的不连续点，且为第一类不连续.

$$f(1+0)=\lim_{x\to1+0}\arctan\frac{1+x}{1-x}=-\frac{\pi}{2},$$

$$f(1-0)=\lim_{x\to1-0}\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{2},$$

$f(x)$ 在 $x=1$ 处的广义左侧导数为

$$f'_-(1)=\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1-0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{\arctan\frac{2+h}{-h}-\frac{\pi}{2}}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\arctan\frac{-h}{2+h}}{-h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{\arctan\frac{-h}{2+h}}{\frac{-h}{2+h}}\cdot\frac{1}{2+h}=\frac{1}{2}.$$

$f(x)$ 在 $x=1$ 处的广义右侧导数为

$$f'_+(1)=\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1+0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{\arctan\frac{2+h}{-h}+\frac{\pi}{2}}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\arctan\frac{h}{2+h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to+0} \frac{\arctan\dfrac{h}{2+h}}{\dfrac{h}{2+h}} \cdot \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}.$$

(3) $x=0$ 为 $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的不连续点,且为第一类不连续点.

$$f(0+0) = \lim_{x\to+0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0,$$

$$f(0-0) = \lim_{x\to-0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的广义左侧导数为

$$f'_-(0) = \lim_{h\to-0} \frac{f(0+h)-f(0-0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to-0} \frac{\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}-1}{h} = \lim_{h\to-0} \frac{-e^{\frac{1}{h}}}{h(1+e^{\frac{1}{h}})}$$

$$= 0.$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处的广义右侧导数为

$$f'_+(0) = \lim_{h\to+0} \frac{f(0+h)-f(0+0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to+0} \frac{\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}}{h} \quad (\text{令 } t=\frac{1}{h}, \text{则 } t\to+\infty),$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{1+e^t} = 0.$$

【1010】 设:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \leqslant x_0; \\ ax+b, & \text{若 } x > x_0. \end{cases}$$

为使函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续且可微,应如何选取系数 a 和 b?

解 因为

$$f(x_0)=x_0^2=f(x_0-0),$$
$$f(x_0+0)=ax_0+b.$$

所以当 $x_0^2=ax_0+b$ 时，

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续

又 $f'_-(x_0)=2x_0, f'_+(x_0)=a.$

所以当 $a=2x_0$ 且 $x=ax_0+b$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 可微分. 故

$$a=2x_0,\qquad b=-x_0^2.$$

【1011】 设

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & 若\ x\leqslant x_0;\\ ax+b, & 若\ x>x_0.\end{cases}$$

其中函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 为左侧可微，应选择什么样的系数 a 和 b 使函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续且可微?

解 因为

$$F(x_0)=f(x_0)=F(x_0-0),$$
$$F(x_0+0)=ax_0+b,$$

又 $F'_-(x_0)=f'_-(x_0), F'_+(x_0)=a.$

所以当 $ax_0+b=f(x_0)$ 且 $a=f'_-(x_0)$ 时，

$F(x)$ 在 x_0 连续且可微，

从而所求系数为

$$a=f'_-(x_0), b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0).$$

【1012】 选择合适的参数 A 和 c，用下述立方抛物线

$$y=A(x-a)(x-b)(x-c),$$

在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上，将两条半直线：

$$y=k_1(x-a),(-\infty<x<a).$$

及 $y=k_2(x-b),(b<x<+\infty).$

光滑地连接起来.

解 对于立方抛物线有

$$y'=A[(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)],$$

此即曲线上任一点切线的斜率. 当接点处两条曲线的切线重合时，它们就平滑地联接起来. 于是

1° 在点 a 处，有

$$A(a-b)(a-c)=k_1,$$

2° 在点 b 处，有

$$A(b-a)(b-c)=k_2,$$

联立上面两方程解之得

$$A=\frac{k_1+k_2}{(b-a)^2},c=\frac{ak_2+bk_1}{k_1+k_2}.$$

【1013】 请用抛物线

$$y=a+bx^2 \qquad (|x|\leqslant c),$$

(其中 a 和 b 为未知参数) 去补充曲线

$$y=\frac{m^2}{|x|} \qquad (|x|>c),$$

的部分，使所得的是一条平滑曲线.

解 显然 $c>0$,

要使两曲线平滑地连接起来，必须在 $x=\pm c$ 处两曲线有相同的纵坐标且它们的切线斜率相等，于是有

$$a+bc^2=\frac{m^2}{c} \text{ 及 } 2bc=-\frac{m^2}{c^2},$$

联立解之得

$$a=\frac{3m^2}{2c},b=-\frac{m^2}{2c^3}.$$

【1014】 如果(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有导数，而函数 $g(x)$ 在此点没有导数;(2) 两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 都无导数，问能否断定两个函数之和 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在点 $x=x_0$ 没有导数?

解 (1) 能. 反设 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 处有导数，又由假设知 $f(x)$ 在 x_0 处有导数，则 $g(x)=F(x)-f(x)$ 在 x_0 处也有导数，这与假设相矛盾.

(2) 不能. 例如

$$f(x)=\frac{x+|x|}{2},g(x)=\frac{x-|x|}{2}.$$

在 $x=0$ 处均无导数，但 $F(x)=f(x)+g(x)=x$ 在 $x=0$

处可导且导数为 1.

【1015】 如果(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数,而函数 $g(x)$ 在此点无导数;(2) 两个在函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 点 x_0 处都无导数,能否确定两个函数的乘积 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$ 在点 $x=x_0$ 没有导数?

设 $x_0=0$,研究以下例子:

(1) $f(x)=x, g(x)=|x|$;

(2) $f(x)=|x|, g(x)=|x|$.

解 (1) 不能. 例如

$f(x)=x$ 在 $x=0$ 处有导数,

$g(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处没有导数.

而它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=x|x|,$$

在点 $x=0$ 处有导数,事实上

$$F'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(0+\Delta x)-F(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x|\Delta x|}{\Delta x}=0.$$

(2) 不能. 例如

$$f(x)=|x|, g(x)=|x|,$$

在点 $x=0$ 处都没有导数,但它们的积

$$F(x)=f(x)\cdot g(x)=|x|^2=x^2,$$

在点 $x=0$ 处有导数,且

$$F'(0)=2x|_{x=0}=0.$$

【1016】 如果(1) 函数 $f(x)$ 在点 $x=g(x_0)$ 有导数,而函数 $g(x)$ 在点 $x=x_0$ 无导数;(2) 函数 $f(x)$ 在点 $x=g(x_0)$ 无导数,而函数 $g(x)$ 在点 $x=x_0$ 有导数;(3) 函数 $f(x)$ 在点 $x=g(x_0)$ 无导数和函数 $g(x)$ 在点 $x=x_0$ 无导数,问函数 $F(x)=f[g(x)]$ 在已知点 $x=x_0$ 的可微性如何?

设 $x_0=0$,研究以下例子:

(1) $f(x)=x^2, g(x)=|x|$;

(2) $f(x)=|x|, g(x)=x^2$;

(3) $f(x)=2x+|x|, g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$.

解 (1) $F'(x_0)$ 可能存在,也可能不存在.

例如,考察函数 $f(x), g(x)$ 及点 x_0 如下:

①$f(x)=x^2, g(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处 $g(0)=0, f'(0)=0, g'(0)$ 不存在,而

$$F(x)=f(g(x))=(|x|)^2=x^2,$$

在 $x=0$ 处可导,且 $F'(0)=0$,这是 $F'(x_0)$ 存在例子.

②$f(x)=x, g(x)=|x|$,在点 $x=0$ 处,$g(0)=0, f'(0)=1, g'(0)$ 不存在,而

$$F(x)=f(g(x))=|x|,$$

$F'(0)$ 不存在,这是 $F'(x_0)$ 不存在的例子.

(2) $F'(x_0)$ 可能存在,也可能不存在. 例如

①$f(x)=|x|, g(x)=x^2$,在点 $x=0, g(0)=0, f'(0)$ 不存在,$g'(0)=0$,而

$$F(x)=f[g(x)]=|x^2|=x^2, F'(0)=0,$$

这是 $F'(x_0)$ 存在的例子.

②$f(x)=|x|, g(x)=x$,在点 $x=0$ 处 $g(0)=0, f'(0)$ 不存在,$g'(0)=1$,而

$$F(x)=f(g(x))=|x|,$$

$F'(0)$ 不存在.

(3) $F'(x_0)$ 可能存在,也可能不存在,例如

①$f(x)=2x+|x|, g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$,在点 $x=0$ 处,$g(0)=0, f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在,但

$$\begin{aligned}F(x)&=f[g(x)]\\&=2\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|\right)+\left|\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|\right|\\&=x.\end{aligned}$$

故 $F'(0)=1$.

②$f(x)=|x|, g(x)=|x|$,在点 $x=0$ 处 $g(0)=0, f'(0)$,

$g'(0)$ 均不存在，而

$$F(x)=f[g(x)]=|x|,$$

$F'(0)$ 也不存在.

【1017】 函数 $y=x+\sqrt[3]{\sin x}$ 的图形在哪些点处有垂直切线？作出此图形.

解 $y'=1+\dfrac{\cos x}{3\sqrt{\sin x}}\qquad (x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

当 $x=k\pi$ 时，根据定义

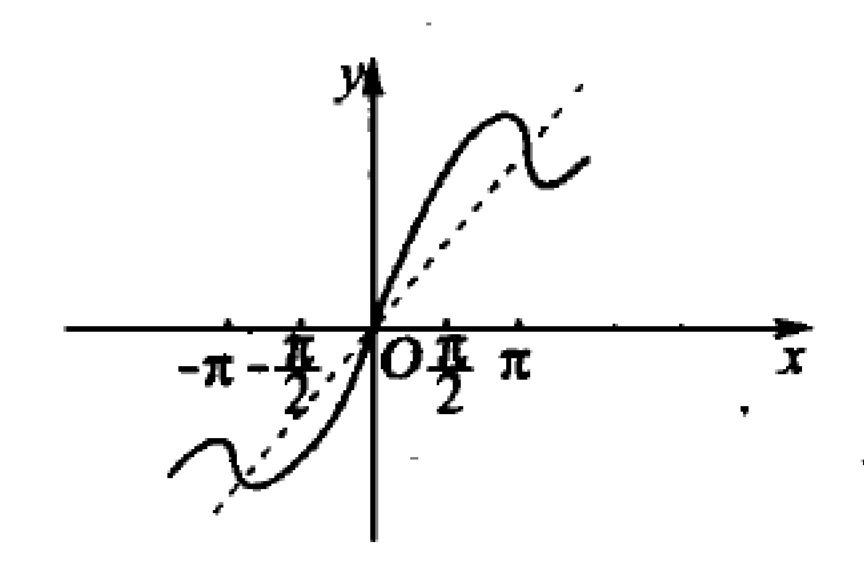
$$y'|_{x=k\pi}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{k\pi+\Delta x+\sqrt[3]{\sin(k\pi+\Delta x)}-k\pi}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\left(1+\sqrt[3]{\frac{(-1)^k}{(\Delta x)^2}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}\right)=\infty.$$

故当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，图形有垂直切线.

当 $x=k\pi$ 时，$y=k\pi$，图形关于坐标原点对称. 如 1017 题图所示



1017 题图

【1018】 函数 $f(x)$ 在其不连续点上可否有(1) 有穷导数；(2) 无穷导数？

研究下例：$f(x)=\operatorname{sgn}x$.

解 (1) 不能. 否则将推出其连续性.

(2) 能. 例如，函数

$$y=f(x)=\operatorname{sgn}x,$$

在点 $x=0$ 处不连续，但

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{|\Delta x|}=+\infty.$$

【1019】 如果函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 可微,且 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$,则是否一定有

(1) $\lim\limits_{x\to a+0}f'(x)=\infty$;

(2) $\lim\limits_{x\to a+0}|f'(x)|=+\infty$?

研究下例:$f(x)=\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$(当 $x\to 0$ 时).

解 (1) 一般地说,不能保证

$$\lim_{x\to a+0}f'(x)=\infty.$$

例如定义在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内的函数.

$$f(x)=\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x},$$

显然,$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上可微,且

$$\lim_{x\to 0+0}f(x)=\infty.$$

但是 $$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x},$$

对于数列 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ $(n=1,2,\cdots)$,

显然有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$,

且 $f'(x_n)=0$,

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}f'(x_n)=0$.

因而 $\lim\limits_{n\to 0}f'(x)=\infty$ 不成立.

(2) 上面的例子也说明,一般地

$$\lim_{x\to a+0}|f'(x)|=+\infty,$$

不能成立.

【1020】 如果函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 可微,且 $\lim\limits_{x\to a+}f'(x)$

$=\infty$,则是否一定有

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\infty?$$

研究下例:$f(x)=\sqrt[3]{x}$ (当 $x\to 0$ 时).

解 不一定.例如

$$f(x)=\sqrt[3]{x},$$

它在$(0,b)(b>0)$ 上可微,且 $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

显然 $$\lim_{x\to+0} f'(x)=+\infty,$$

然而 $$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}=0.$$

【1021】 假设函数 $f(x)$ 在区间$(x_0,+\infty)$ 可微,且存在 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,由此可以得出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在吗?

研究下例:$f(x)=\dfrac{\sin(x^2)}{x}$.

解 不能.例如,函数

$$f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x},$$

在$(0,+\infty)$ 上可微分

$$f'(x)=2\cos(x^2)-\frac{\sin(x^2)}{x^2},$$

且 $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}=0,$$

但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 不存在.

【1022】 假设有界函数$f(x)$在区间$(x_0,+\infty)$可微,且存在 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$,能否由此推导出存在有穷的或无穷的 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

研究例子:$f(x)=\cos(\ln x)$.

解 不能.例如

$$f(x)=\cos(\ln x),$$

它在$(0,+\infty)$ 上有界且可微分,其导数为

$$f'(x)=-\frac{\sin(\ln x)}{x}.$$

显然 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$,

然后, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在.

【1023】 对函数之间的不等式能否逐项微分?

解 不能.例如

设 $f(x)=2x,\quad g(x)=x^2+1$,

在$(-\infty,1)$ 上有 $f(x)\leqslant g(x)$,

但在此区间上没有

$$f'(x)\leqslant g'(x).$$

因为 $f'(x)=2, g'(x)=2x$.

【1024】 推导出表示下述两个和式的公式:

$$P_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}.$$

及 $$Q_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}.$$

提示:研究$(x+x^2+\cdots+x^n)'$.

解 设

$$\sigma_n=x+x^2+\cdots+x^n, \quad ①$$

$$\tau_n=1\cdot x+2\cdot x^2+\cdots+nx^n, \quad ②$$

则 $$\sigma'_n=1+2x+\cdots+nx^{n-1}=P_n,$$

$$\tau'_n=1^2+2^2x+\cdots+n^2x^{n-1}=Q_n.$$

而 $$\sigma_n=\frac{x(1-x^n)}{1-x},$$

所以 $$P_n=\sigma'_n=\left[\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right]'$$

$$=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2},$$

而 $$\tau_n=x(1+2x+\cdots+nx^{n-1})=xP_n.$$

所以 $$Q_n=\tau'_n=P_n+xP'_n$$

$$=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n-1}}{(1-x)^2}+x\left[\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n-1}}{(1-x)^2}\right]'$$

$$=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

【1025】 推导出表示下列和式的公式:

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx.$$

及 $$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx.$$

解 $$S_n = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[2\sin\frac{x}{2}\sin x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 2x + \cdots + 2\sin\frac{x}{2}\sin nx\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \cdots + \left(\cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

所以 $$S_n = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$

又 $$T_n = S'_n = \left(\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)'$$

$$= \frac{\left[n\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x + (n+1)\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x\right]\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$- \frac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

故 $$T_n=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

【1025.1】 推导出表示和式的公式：

$$S_n=\mathrm{ch}x+2\mathrm{ch}2x+\cdots+n\mathrm{ch}nx$$

提示：$S_n=(\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}2x+\cdots+\mathrm{sh}nx)'$.

解 设 $T_n=\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}2x+\cdots+\mathrm{sh}nx$，

则 $$T_n=\frac{1}{2}[(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-(e^{-x}+e^{-2x}+\cdots+e^{-nx})]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^x(1-e^{nx})}{1-e^x}-\frac{e^{-x}(1-e^{-nx})}{1-e^{-x}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^x(1-e^{nx})}{1-e^x}+\frac{1-e^{nx}}{1-e^x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1+e^x-e^{(n+1)x}-e^{-nx}}{1-e^x},$$

从而 $$S_n=T'_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1+e^x-e^{(n+1)x}-e^{-nx}}{1-e^x}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(e^x-(n+1)e^{(n+1)x}+ne^{-nx})(1-e^x)+(1+e^x-e^{(n+1)x}-e^{-nx})e^x}{(1-e^x)^2}$$

$$=\frac{2e^x-(n+1)e^{(n+1)x}+ne^{(n+2)x}+ne^{-nx}-(n+1)e^{-(n-1)x}}{2(1-e^x)^2}.$$

【1026】 利用恒等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

推导出表示和式的公式：

$$S_n=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}.$$

解 对等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},\qquad ①$$

两边分别求导数得

$$-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$
$$-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}-\cdots$$
$$-\frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^n}$$
$$=\frac{\cos x\sin\frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^n}\sin x\cdot\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin^2\frac{x}{2^n}}.\qquad ②$$

② ÷ ① 得

$$-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}-\cdots-\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$
$$=\cot x-\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n},$$

因此　$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$
$$=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x.$$

【1027】　证明可微分的偶函数的导数是奇函数，而可微分的奇函数的导数是偶函数. 请对此事实给出几何解释.

证　设 $f(x)$ 为偶函数，则

$$f(x)=f(-x),$$

两端对 x 求导数得

$$f'(x)=-f'(-x),$$

即　$$f'(-x)=-f'(x),$$

亦即 $f'(x)$ 为奇函数.

同理可证：可微分的奇函数的导函数为偶函数.

这个事实说明：关于 Oy 轴对称的图形，其对称点的切线也关

于 Oy 轴对称;关于原点对称的图形,其对称点的切线互相平行.

【1028】 证明可微分的周期函数的导数仍然是具有同样周期的周期函数.

证 设 $f(x)$ 为周期函数,周期为 T

则 $$f(x+T)=f(x),$$

两边对 x 求导数,得

$$f'(x+T)=f'(x),$$

即 $f'(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

【1029】 如果圆半径以 2 厘米 / 秒的速度均匀增大,当圆半径 $R=10$ 厘米时,圆面积以什么样的速度增加?

解 设圆的面积为 S

则 $$S=\pi R^2,$$

且 $$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=2,$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=2\pi R\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\bigg|_{R=10}=40\pi(\text{平方厘米 / 每秒}).$$

故当 R 为 10 厘米时,圆面积的增加速度为 40π 平方厘米 / 每秒.

【1030】 长方形的一边 $x=20$ 米,另一边 $y=15$ 米,如果第一边以 1 米 / 秒的速度减少,而第二边以 2 米 / 秒的速度增加,问此长方形的面积及对角线变化的速度是多少?

解 面积为 $S=xy$,对角线的长为

$$l=\sqrt{x^2+y^2}\qquad(x>0,y>0),$$

对时间 t 求导数有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

及 $$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

按题设有 $x=20,y=15$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2,$$

代入上面两式得

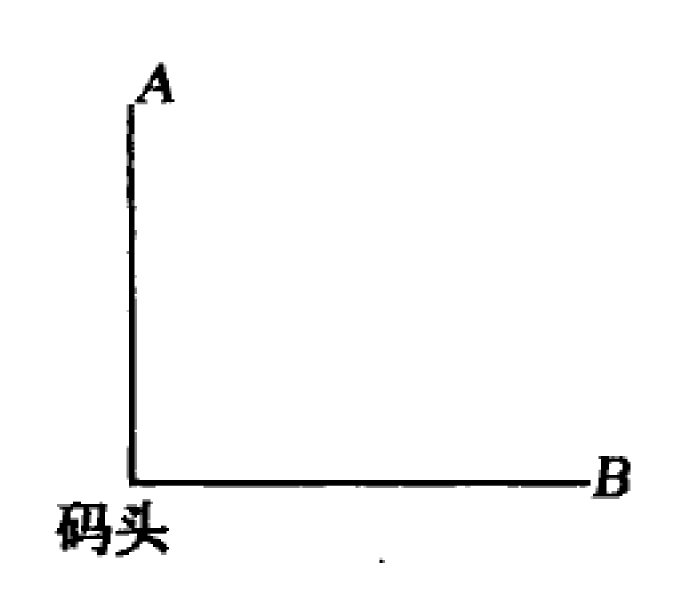
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=20\cdot 2+15\cdot(-1)=25,$$

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{-20+2\cdot 15}{\sqrt{20^2+15^2}}=0.4,$$

于是,该长方形的面积以 25 平方米 / 秒的速度变化而对角线以 0.4 米 / 每秒的速度变化.

【1031】 轮船 A 和 B 由同一码头同时出发,A 船向北,B 船向东，如果 A 船的航速为 30 千米 / 小时,B 船的航速为 40 千米 / 小时，问二船之间的距离以什么样的速度增加?

解 记时间为 t(小时),A 与 B 离码头的距离为 $30t$ 千米与 $40t$ 千米故两船间的距记为



1031 题图

$$d(t)=\sqrt{(30t)^2+(40t)^2}=50t(\text{千米}),$$

故两船间的距离增加的速度为 $d'(t)=50$(千米 / 小时).

【1032】 假设

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant 2;\\ 2x-2, & \text{若 } 2<x<+\infty,\end{cases}$$

$S(x)$ 表示由曲线 $y=f(x)$、轴 Ox 和经过点 $x(x\geqslant 0)$ 垂直于 Ox 的直线所围成的面积. 请写出函数 $S(x)$ 解析公式，求出导数 $S'(x)$,并作出函数 $y=S'(x)$ 的图形.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时,

$$S(x)=\frac{1}{2}x^2,$$

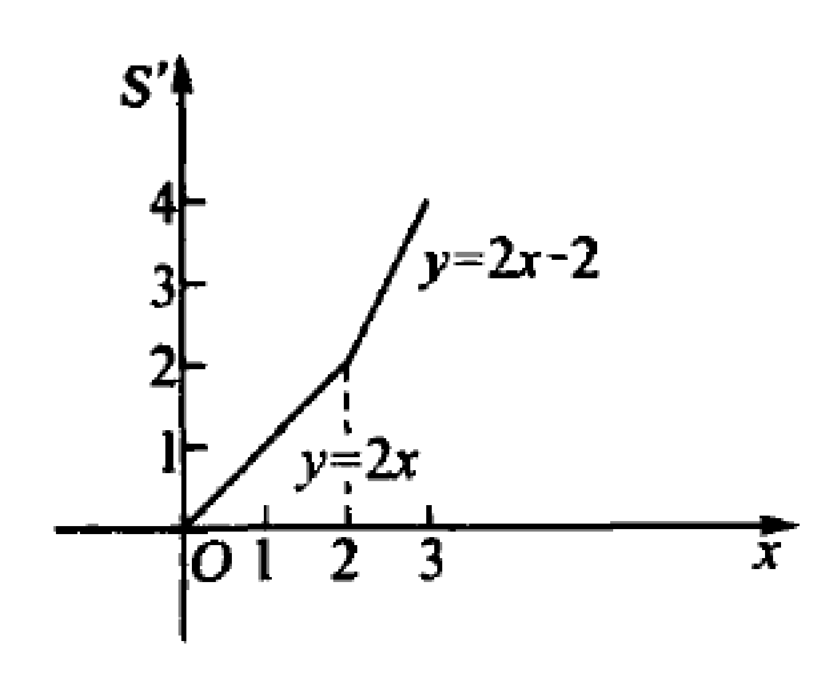
当 $2<x<++\infty$ 时,

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot 2^2+\frac{1}{2}(x-2)[2+(2x-2)]$$
$$=x^2-2x+2,$$

即
$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 2;\\ x^2-2x+2, & 2<x<+\infty.\end{cases}$$

所以
$$S'(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 2 \text{ 时},\\ 2x-2, & \text{当 } 2<x<+\infty \text{ 时}.\end{cases}$$

$S'(x)$ 的图形如 1032 题图所示



1032 题图

【1033】 函数 $S(x)$ 是由圆弧 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，轴 Ox 及经过点 O 和 $x(|x|\leqslant a)$ 而与轴 Ox 垂直的两条直线所围成的面积，请写出函数 $S(x)$ 的解析公式，求出导数 $S'(x)$，并作出这个导数的图形.

解 若 $S(x)$ 等于一个直角三角形的面积加上一个中心角为 α 的扇形的面积，其中 $\sin\alpha=\frac{|x|}{a}$，故

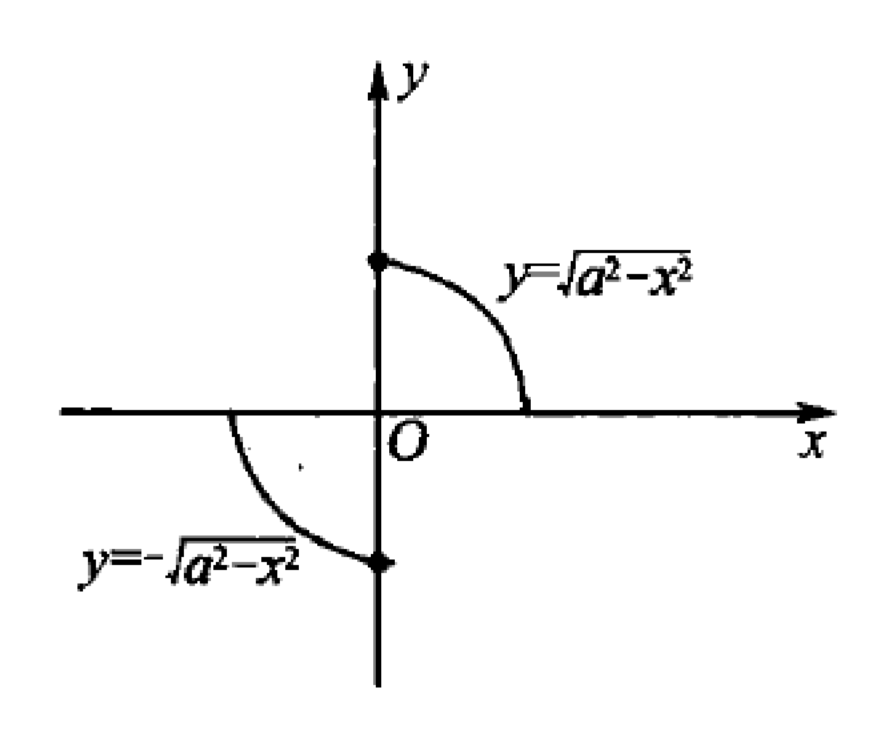
当 $0<|x|\leqslant a$ 时，
$$S(x)=\frac{|x|}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{|x|}{a}.$$

于是
$$S'(x)=\frac{1}{2}\frac{|x|}{x}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{|x|}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$+\frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}\frac{|x|}{x}$$

$$=\frac{|x|}{x}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$=\sqrt{a^2-x^2}\operatorname{sgn}x \qquad (0<|x|\leqslant a).$$

$y=S'(x)$ 的图形如 1033 题图所示



1033 题图

§2. 反函数的导数，用参数表示的函数的导数，隐函数的导数

1. 反函数的导数 若具有导数 $f'(x)\neq 0$ 的可微分函数 $y=f(x)(a<x<b)$ 具有单值连续反函数 $x=f^{-1}(y)$，则此反函数也可微分，且公式 $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$ 成立.

2. 用参数表示的函数的导数

若方程组：$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\qquad(\alpha<t<\beta).$

(其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都是可微分的函数，且 $\varphi'(t)\neq 0$) 在某个域内确定 y 是 x 的单值可微分函数：$y=\psi(\varphi^{-1}(x))$，则这个函数的导数存在且可以根据以下公式求出：$y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

3. 隐函数的导数

如果可微分函数 $y=y(x)$ 满足方程

$$F(x,y)=0,$$

则此隐函数的导数 $y'=y'(x)$ 可由以下方程求出：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x,y)]=0,$$

其中 $F(x,y)$ 被当作变量 x 的复合函数.

【1034】 证明:由方程 $y^3+3y=x$ 确定的单值函数 $y=y(x)$ 存在,并求出其导数 $y'(x)$.

证 对于函数

$$x=f(y)=y^3+3y,$$

有 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=f'(y)=3(y^2+1)>0(-\infty<y<+\infty).$$

所以 $f(y)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内是严格增加的函数,故存在单值的反函数 $y=y(x)(-\infty<x<+\infty)$,且

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{3(y^2+1)}.$$

【1035】 证明:由方程

$$y-\varepsilon\sin y=x \qquad (0\leqslant\varepsilon<1),$$

确定的单值函数 $y=y(x)$ 存在,并求出它的导数 y'_x.

证 对于函数 $x=f(y)=y-\varepsilon\sin y$,

有 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=f'(y)=1-\varepsilon\cos y>0 \qquad (-\infty<y<+\infty).$$

故 $f(y)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上是严格增加的,从而存在单值的反函数 $y=y(x)$,且 $y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$.

【1036】 若

(1) $y=x+\ln x \qquad (x>0)$;

(2) $y=x+\mathrm{e}^x$;

(3) $y=\mathrm{sh}x$;

(4) $y=\mathrm{th}x$.

确定它们的反函数 $x=x(y)$ 的存在域,并求出它们的导数.

解 (1) 由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+\frac{1}{x}>0 \qquad (x>0)$,

知,有单值连续的反函数 $x=x(y)$ 其定义域为 $-\infty<y<+\infty$,而导函数为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x}{x+1}.$$

(2) 由 $y'_x=1+e^x>0$ 知，有单值连续的反函数 $x=x(y)$，其定义域为 $-\infty<y<+\infty$，导函数为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{1-x+y}.$$

(3) 由 $y'_x=\mathrm{ch}x>0$ 知，有单值连续的反函数 $x=x(y)$，其定义域为 $-\infty<y<+\infty$，而导函数为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'_x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

(4) 由 $y'_x=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}>0$ 知有单值连续的反函数 $x=x(y)$，其定义域为 $-1<y<1$，其导函数为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'_x}=\mathrm{ch}^2x.$$

而 $$y^2=\mathrm{th}^2x=\frac{\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}^2x}=\frac{\mathrm{ch}^2x-1}{\mathrm{ch}^2x}=1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}.$$

所以 $$\mathrm{ch}^2x=\frac{1}{1-y^2},$$

故 $$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1-y^2}.$$

【1037】 若

(1) $y=2x^2-x^4$；

(2) $y=\frac{x^2}{1+x^2}$；

(3) $y=2e^{-x}-e^{-2x}$.

请选出反函数 $x=x(y)$ 的单值连续的各枝，求出它们的导数并作其图形.

解 (1) 由 $x^4-2x^2+y=0$，

得 $$x^2=1\pm\sqrt{1-y}.$$

所以反函数的单值连续的各枝：

$$f_1(y) = -\sqrt{1+\sqrt{1-y}} \qquad (-\infty < y \leqslant 1),$$

$$f_2(y) = -\sqrt{1-\sqrt{1-y}} \qquad (0 \leqslant y \leqslant 1),$$

$$f_3(y) = \sqrt{1-\sqrt{1-y}} \qquad (0 \leqslant y \leqslant 1),$$

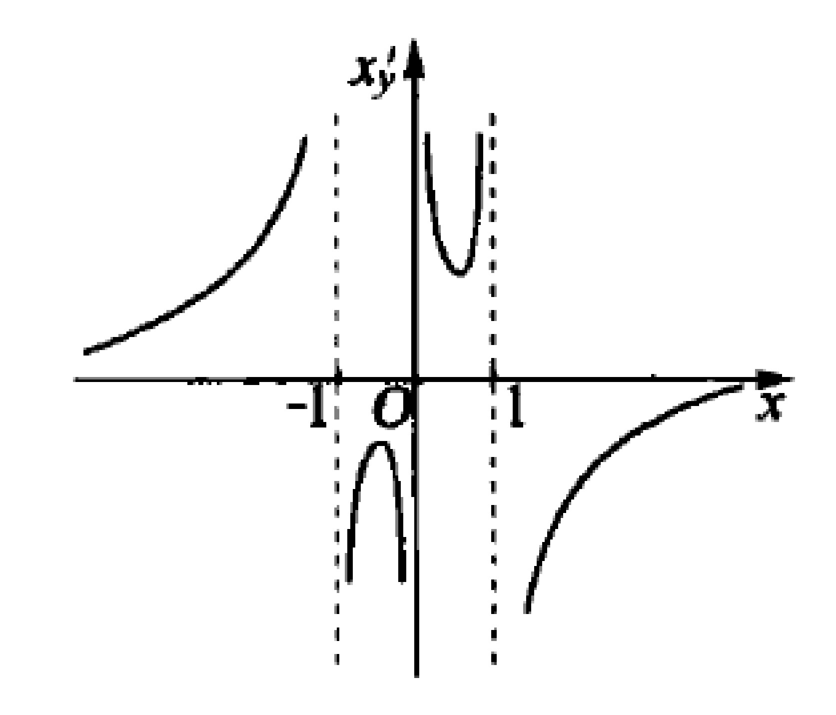
$$f_4(y) = \sqrt{1+\sqrt{1-y}} \qquad (-\infty < y \leqslant 1).$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x - 4x^3$,

得 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{4x(1-x^2)}.$$

从而 $$f'_i(y) = \frac{1}{4x(1-x^2)} \qquad (i = 1,2,3,4).$$

如 1037 题图 1



1037 题图 1

(2) 由 $\dfrac{x^2}{1+x^2} = y$,

得 $$x^2 = \frac{y}{1-y}.$$

反函数的单值连续的各枝为:

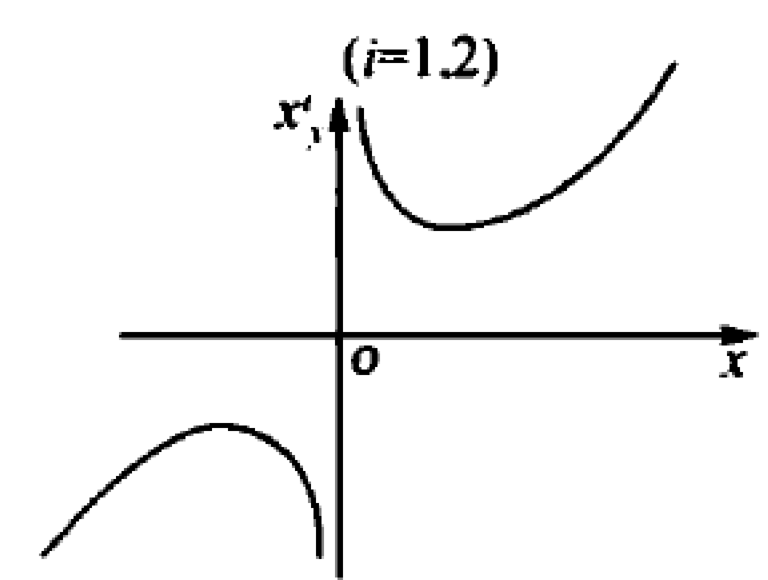
$$f_1(y) = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}, \quad f_2(y) = \sqrt{\frac{y}{1-y}}, \qquad (0 \leqslant y \leqslant 1).$$

由 $y'_x = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$,

有　$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{(1+x^2)^2}{2x}$，

从而　$f'_i(y) = \frac{(1+x^2)^2}{2x}$　$(i=1,2)$.

如 1037 题图 2



1037 题图 2

(3) 由 $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$，

得　$e^{-x} = 1 \pm \sqrt{1-y}$.

所以反函数的单值连续的各枝为

$$f_1(y) = -\ln(1+\sqrt{1-y}), (-\infty < y \leqslant 1).$$

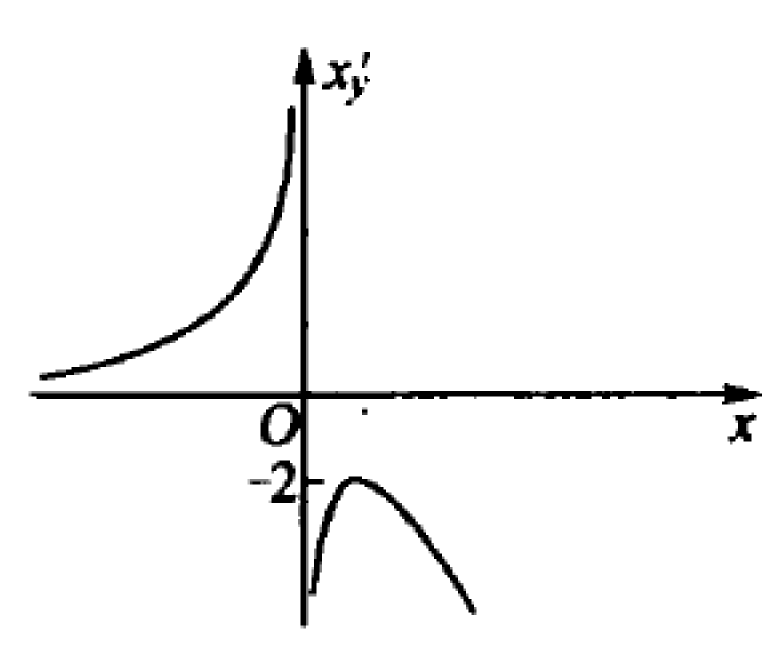
$$f_2(y) = -\ln(1-\sqrt{1-y}), (0 < y \leqslant 1).$$

由　$\frac{dy}{dx} = -2e^{-x} + 2e^{-2x}$，

有　$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{2(e^{-2x} - e^{-x})}$，

故　$f'_i(y) = \frac{1}{2(e^{-2x} - e^{-x})}$　$(i=1,2)$.

如 1037 题图 3



1037 题图 3

【1038】 若$x=-1+2t-t^2$,$y=2-3t+t^3$.作出函数$y=y(x)$的略图,并求其导数y'_x,当$x=0$及$x=-1$时,$y'_x(x)$等于多少?在什么点$M(x,y)$处导数$y'_x(x)=0$?

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3+3t^2}{2-2t}=-\frac{3}{2}(1+t).$$

当$t=-1$,即$x=-4$,$y=4$时,$y'_x(x)=0$;

当$x=0$时,$t=1$,此时$y'_x(x)=-3$;

当$x=-1$时,$t=0$或$t=2$,此时

$$y'_x(x)=-\frac{3}{2}\text{ 或 }y'_x(x)=-\frac{9}{2}.$$

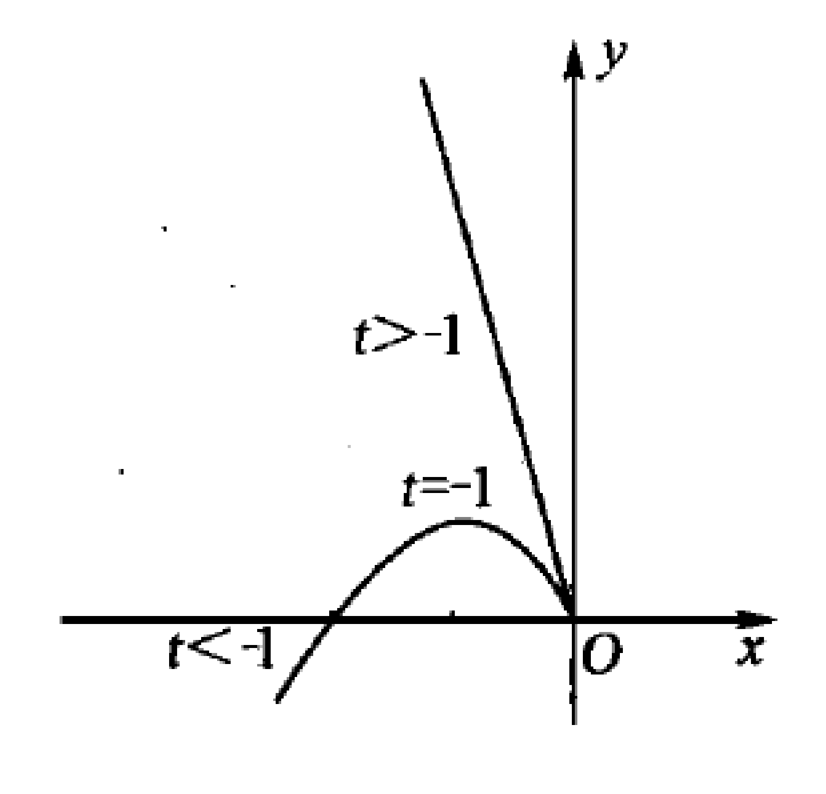
列表

t	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
y	0	4	2	0	4	20	54

当$t<-1$时$\frac{dy}{dx}>0$,函数y随自变量增加而增加,曲线上升.

当$t>-1$时$\frac{dy}{dx}<0$,曲线下降.

如1038题图



1038 题图

求出导数 y'_x（参数为正数）（1039 ~ 1046）.

【1039】 $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}},y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

解 $$\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{6\sqrt[3]{t^2}\cdot\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}},$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{6\sqrt{t}\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}.$$

于是 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}\qquad(t>0,t\neq1).$$

【1040】 $x=\sin^2t,y=\cos^2t$.

解 $$\frac{dy}{dt}=-2\sin t\cos t,\frac{dx}{dt}=2\sin t\cos t.$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\sin t\cos t}{2\sin t\cos t}=-1\qquad(0<x<1).$$

【1041】 $x=a\cos t,y=b\sin t$.

解 $$\frac{dy}{dt}=b\cos t,\frac{dx}{dt}=-a\sin t,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t\qquad(0<|t|<\pi).$$

【1042】 $x=a\operatorname{ch}t,y=b\operatorname{sh}t$.

解 $$\frac{dy}{dt}=b\operatorname{ch}t,\frac{dx}{dt}=a\operatorname{sh}t,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\operatorname{ch}t}{a\operatorname{sh}t}=\frac{b}{a}\operatorname{cth}t\qquad(t\neq0).$$

【1043】 $x=a\cos^3t,y=a\sin^3t$.

解 $$\frac{dy}{dt}=3a\sin^2t\cos t,$$

$$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2t\sin t,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2t\cos t}{-3a\cos^2t\sin t}=-\tan t$$

$$\left(t\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\text{ 为整数}\right).$$

【1044】 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2}$

$$(t\neq 2k\pi,k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$$

【1045】 $x=\mathrm{e}^{2t}\cos^2 t,y=\mathrm{e}^{2t}\sin^2 t$.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2\mathrm{e}^{2t}\sin^2 t+2\mathrm{e}^{2t}\sin t\cos t$

$=2\mathrm{e}^{2t}\sin t(\sin t+\cos t)$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\mathrm{e}^{2t}\cos t(\cos t-\sin t)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2\mathrm{e}^{2t}\sin t(\sin t+\cos t)}{2\mathrm{e}^{2t}\cos t(\cos t-\sin t)}$$

$$=\frac{\sin t\cdot\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t\cdot\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}=\tan t\cdot\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left(t\neq k\pi+\frac{\pi}{2},t\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right)$$

【1046】 $x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\qquad y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}}\left[-\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\right]=\frac{\operatorname{sgn}t}{(1+t^2)}$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2}.$$

于是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\operatorname{sgn}t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=\operatorname{sgn}t\qquad(0<|t|<+\infty)$.

【1047】 证明:由方程组

$$x=2t+|t|,y=5t^2+4t|t|,$$

确定的函数 $y=y(x)$ 在 $t=0$ 时可微分,但它在此点的导数不能

用普通公式求出.

证 当 t 由 0 变化到 Δt 时，x 由 0 变化到 $\Delta x = 2\Delta t + |\Delta t|$，$y$ 由 0 变化到 $\Delta y = 5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|$

于是 $$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=0} = \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|}$$

$$= \begin{cases} 3\Delta t & \Delta t > 0, \\ \Delta t & \Delta t < 0, \end{cases}$$

从而 $$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 0, (\Delta t \to 0),$$

即 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微分. 但由于 $|t|$ 当 $t = 0$ 时不可微. 因而 $\frac{dx}{dt}$ 及 $\frac{dy}{dt}$ 当 $t = 0$ 时不存在. 所以，导数 $\frac{dy}{dx}$ 当 $t = 0$ 时的值不能从普通公式求得.

求下列隐函数的导数 y'_x(1048 ~ 1053).

【1048】 $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$

问当 $x = 2$ 且 $y = 4$ 及 $x = 2$ 且 $y = 0$ 时，y' 等于多少?

解 对 x 求导得

$$2x + 2y + 2xy'_x - 2yy'_x = 2,$$

于是 $$y'_x = \frac{1 - x - y}{x - y} \qquad (x \neq y),$$

所以 $$\left.y'_x\right|_{\substack{x=2\\y=4}} = \frac{5}{2}, \quad \left.y'_x\right|_{\substack{x=2\\y=0}} = -\frac{1}{2}.$$

【1049】 $y^2 = 2px$ （**抛物线**）.

解 对 x 求导数，得 $2yy'_x = 2p$，

所以 $$y'_x = \frac{p}{y} \qquad (y \neq 0),$$

【1050】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ （**椭圆**）.

解 对 x 求导数，得

$$\frac{2}{a^2}x + \frac{2}{b^2}yy'_x = 0.$$

所以 $$y'_x = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \qquad (y \neq 0).$$

【1051】 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ (抛物线).

解 两边对 x 求导数得

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}y'_x=0.$$

所以 $y'_x=-\sqrt{\frac{y}{x}}$ $(x>0,y>0)$.

【1052】 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (内摆线).

解 两边对 x 求导数,得 $\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{y}}y'_x=0.$

所以 $y'_x=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$ $(x\neq 0)$.

【1053】 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ (对数螺线).

解 对 x 求导数得

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y'_x}{x}-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x+yy'_x}{x^2+y^2}.$$

所以 $y'_x=\frac{x+y}{x-y}$ $(x\neq y,x\neq 0)$.

【1054】 求出 y'_x,若:

(1) $r=a\varphi$ (阿基米德螺线);

(2) $r=a(1+\cos\varphi)$ (心脏形线);

(3) $r=ae^{m\varphi}$ (对数螺线).

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\varphi=\arctan\frac{y}{x}$ 为极坐标.

解 $x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi$,其中 $r=r(\varphi)$,

于是 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}=\frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi-r\sin\varphi},\qquad ①$$

(1) $\frac{dr}{d\varphi}=a$ 代入 ① 式得,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a\sin\varphi+a\varphi\cos\varphi}{a\cos\varphi-a\varphi\sin\varphi}=\tan(\varphi+\mathrm{costan}\varphi).$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=-a\sin\varphi$ 代入(1)得，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-a\sin^2\varphi+a(1+\cos\varphi)\cos\varphi}{-a\sin\varphi\cos\varphi-a(1+\cos\varphi)\sin\varphi}$$

$$=-\frac{\cos2\varphi+\cos\varphi}{\sin2\varphi+\sin\varphi}$$

$$=-\frac{2\cos\frac{3\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{3\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}}=-\cot\frac{3\varphi}{2}$$

$$\left(\varphi\neq0,\varphi\neq\pm\frac{2\pi}{3}\right).$$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=am\mathrm{e}^{m\varphi}$ 代入 ① 式得，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{am\mathrm{e}^{m\varphi}\cdot\sin\varphi+a\mathrm{e}^{m\varphi}\cos\varphi}{am\mathrm{e}^{m\varphi}\cos\varphi-a\mathrm{e}^{m\varphi}\sin\varphi}$$

$$=\frac{m\sin\varphi+\cos\varphi}{m\cos\varphi-\sin\varphi}=\tan\left(\varphi+\arctan\frac{1}{m}\right).$$

§ 3. 导数的几何意义

1. 切线和法线的方程

对可微分函数 $y=f(x)$ 图形上一点 $M(x,y)$(图 7) 处的切线 MT 和法线 MN 的方程式分别具有以下形式：

$$Y-y=y'(X-x)$$

和
$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

其中 X,Y 为切线或法线的流动坐标，而 $y'=f'(x)$ 为切点处的导数值.

2. 切线和法线线段

对于切线和法线线段：

PT 为次切线，PN 为次法线，MT 为切线，MN 为法线(图 7)

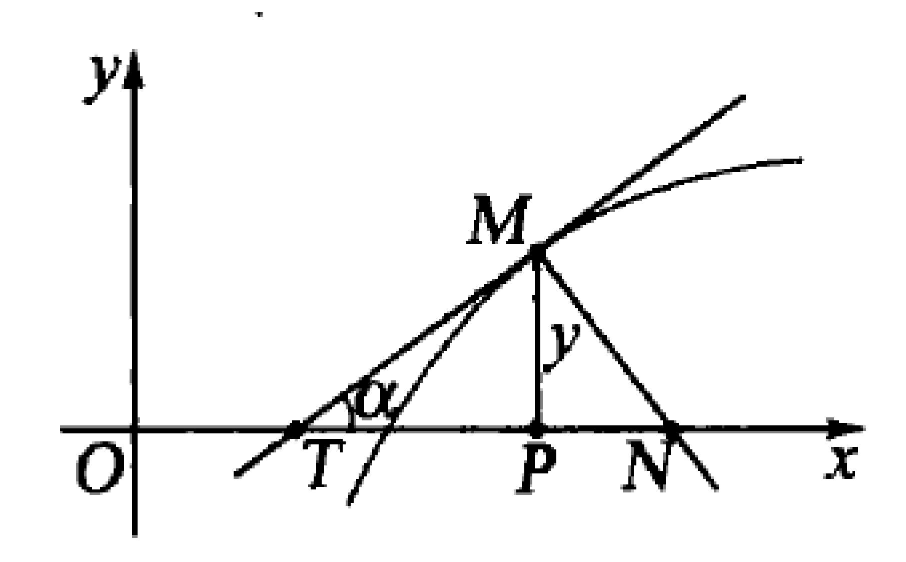


图 7

设 $\tan\alpha = y'$，计算得出以下值：

$$PT = \left|\frac{y}{y'}\right|, PN = |yy'|,$$

$$MT = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}, MN = |y|\sqrt{1+y'^2}.$$

3. 切线和切点向径之间的夹角

如果 $r = f(\varphi)$ 为极坐标系中曲线的方程，而 β 为切线 MT 和切点 M 的向径 OM 所成的角(图 8)

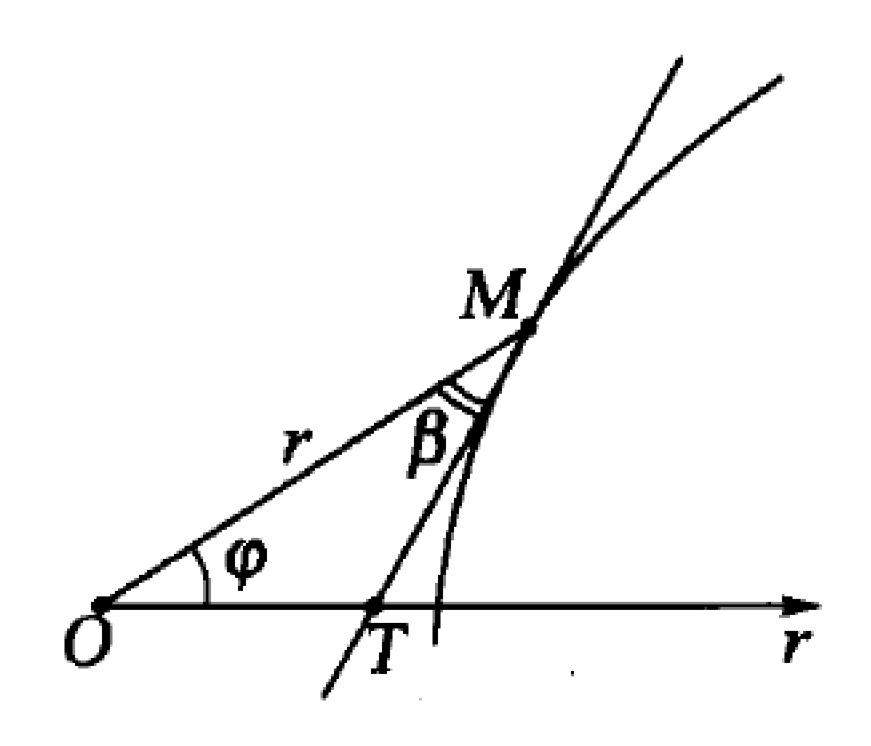


图 8

则：$\tan\beta = \dfrac{r}{r'}$.

【1055】 求 $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ 在各点 $A(-1,0)$，$B(2,3)$，$C(3,0)$ 处的切线和法线方程.

解 由于

$$y'_x = \sqrt[3]{3-x} - \frac{1}{3}\frac{x+1}{\sqrt[3]{(3-x)^2}},$$

所以在 $A(-1,0)$ 点的切线方程为 $y-0=y'_x|_{x=-1}(x+1)$，

即 $\quad y=\sqrt[3]{4}(x+1)$.

法线方程为 $y-0=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1)$，

即 $\quad y=-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$.

在 $B(2,3)$ 点的切线方程为

$$(y-3)=y'_x|_{x=2}(x-2),$$

即 $\quad y=3$.

法线方程为 $x=2$，

由于在 $C(3,0)$ 点 $y'_x=\infty$，故切线方程为

$$x=3,$$

法线方程为

$$y=0.$$

【1056】 在曲线 $y=2+x-x^2$. 上哪些点的切线.

(1) 和 Ox 轴平行；

(2) 和第一象限的角平分线平行？

解 因为 $y'=1-2x$.

(1) 令 $y'=0$ 得

$$x=\frac{1}{2},y=2+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4},$$

故在点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{4}\right)$ 处，其切线平行于 Ox 轴.

(2) 令 $y'=1$，得 $x=0,y=2$，

故在点 $(0,2)$ 处，其切线和第一象限角的平分线平行.

【1057】 证明：抛物线

$$y=a(x-x_1)(x-x_2) \qquad (a\neq 0,x_1<x_2).$$

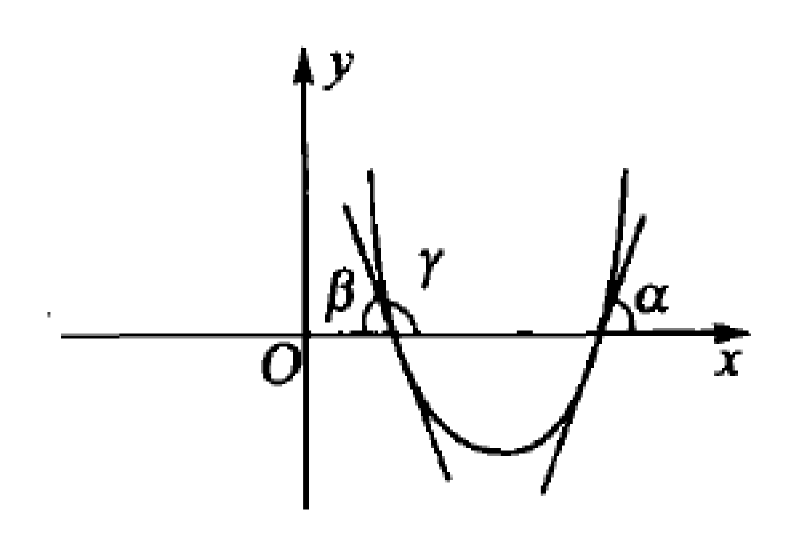
和 Ox 轴相交成彼此相等的两角 α 与 $\beta\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

证 抛物线与 Ox 轴的两交点分别为 $A(x_1,0)$,$B(x_2,0)$,

由于 $y'_x = 2ax - a(x_1 + x_2)$,

故在点 A,B 的切线的斜率为

$$k_A = 2ax_1 - a(x_1 + x_2)$$
$$= a(x_1 - x_2) = \tan\gamma = \tan(\pi - \beta),$$
$$k_B = 2ax_2 - a(x_1 + x_2) = a(x_2 - x_1) = \tan\alpha.$$



1057 题图

故 $\tan\beta = \tan(\pi - \gamma) = -\tan\gamma = -a(x_1 - x_2) = \tan\alpha$,

因此 $\alpha = \beta$.

【1058】 请在曲线 $y = 2\sin x \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$,

上确定"曲线的坡度"(即 $|y'|$) 大于 1 的区域.

解 $y' = 2\cos x$.

要 $|y'| > 1$ 只须 $|\cos x| > \frac{1}{2}$,

即 $|x| < \frac{\pi}{3}$ 及 $\frac{2\pi}{3} < |x| \leqslant \pi$.

因此当

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \cup \left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3},\pi\right]$$

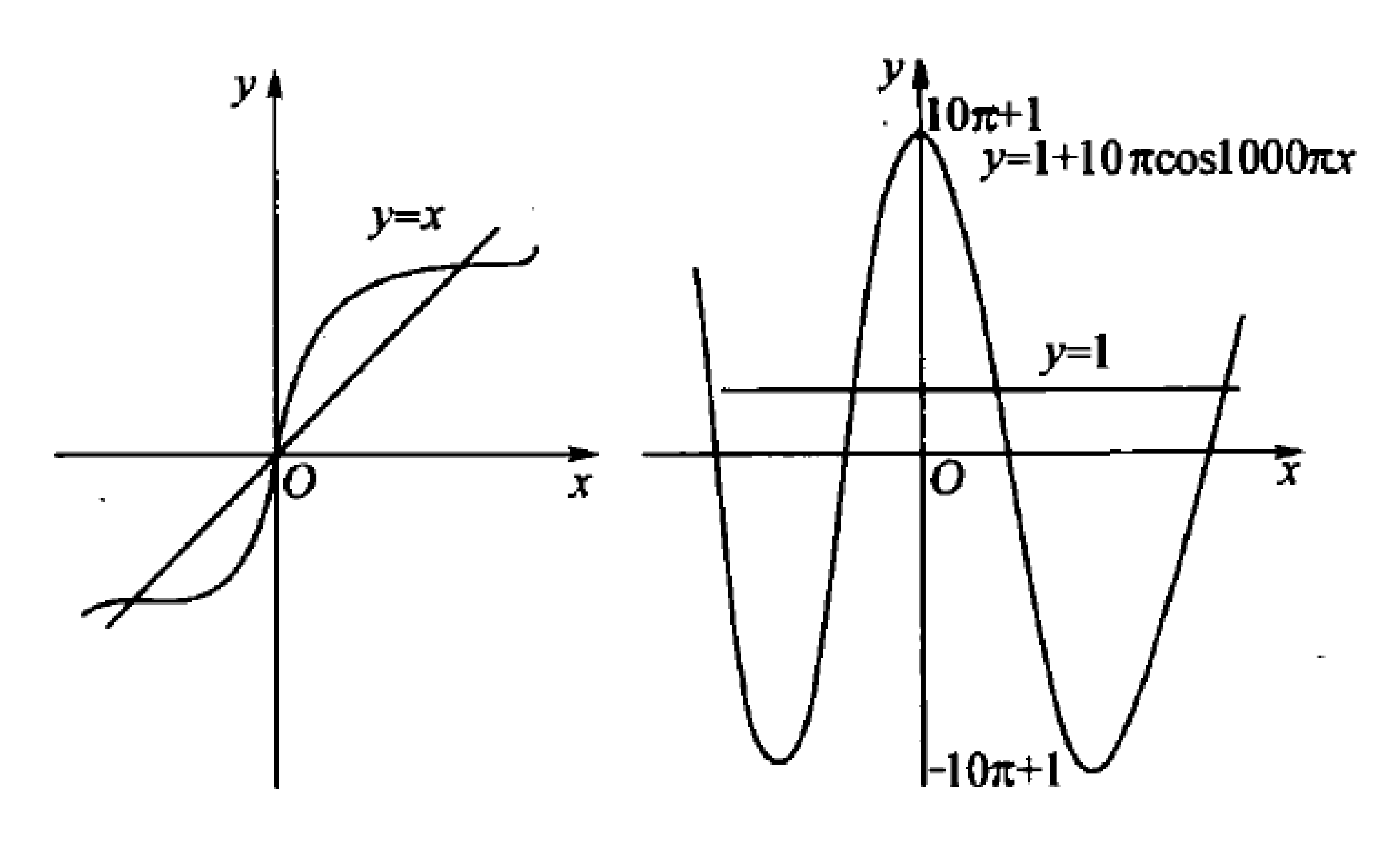
时曲线 $y = 2\sin x(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ 的坡度大于 1.

【1059】 函数 $y = x$ 与 $y_1 = x + 0.01\sin 1000\pi x$ 彼此相差不大于 0.01,问这些函数的导数之差的最大值是多少?作出相应的图形.

解 导函数之差的最大值.

$\max|y'-y'_1| = \max|10\pi\cdot\cos1000\pi x| = 10\pi.$

如 1059 题图所示



1059 题图

【1060】 曲线 $y=\ln x$ 与 Ox 轴的交角是多少?

解 曲线 $y=\ln x$ 与 Ox 轴相交于(1,0),设曲线与 Ox 轴的相交角为 α,则 $\tan\alpha = y'_x|_{x=1} = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = 1$,

故交角为$\frac{\pi}{4}$.

【1061】 曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 的交角是多少?

解 两曲线的交点为(0,0)及(1,1)由于导数为 $y'=2x$ 及 $y'=\frac{1}{2y}$,故在(0,0)点两曲线的交角显然为$\frac{\pi}{2}$在(1,1)点,两切线的斜率分别为 $k_1=2$ 及 $k_2=\frac{1}{2}$.

故其交角 θ 的正切为 $\tan\theta = \frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2} = \frac{3}{4}$,

于是 $\theta = \arctan\frac{3}{4}$.

【1062】 曲线 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的交角是多少?

解 解方程组

$$\begin{cases} y=\sin x, \\ y=\cos x. \end{cases}$$

得当 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$(k 为整数)时，两曲线相交，其次，求两曲线在 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ 处切线的斜率为

$$k_1=(\sin x)'\big|_{x=k\pi+\frac{\pi}{4}}=(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k_2=(\cos x)'\big|_{x=k\pi+\frac{\pi}{4}}=(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处交角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$ 的正切为

$$\tan\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}.$$

于是 $\theta=\arctan 2\sqrt{2}\approx 70°30'$.

【1063】 为使曲线 $y=\arctan nx\ (n>0)$ 和 Ox 轴的交角大于 $89°$，应当如何选择参数 n?

解 曲线 $y=\arctan nx$ 与 Ox 轴的交点不妨取 $(0,0)$ 点，故交角 θ 的正切为 $\tan\theta=y'\big|_{x=0}=\frac{n}{1+(nx)^2}\Big|_{x=0}=n$

$\theta>89°$，等价于 $\tan\theta>\tan 89°=57.29$，即 $n>57.29$.

【1063.1】 证明：曲线 $y=|x|^{\alpha}$

(1) 当 $0<\alpha<1$ 时，与 Oy 轴相切；

(2) 当 $1<\alpha<+\infty$ 时，与 Ox 轴相切.

证 曲线 $y=|x|^{\alpha}$ 在坐标原点 $(0,0)$ 与 Ox 轴及 Oy 轴相交.

(1) 当 $0<\alpha<1$ 时，在 $x=0$ 处有

$$y'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|\Delta x|^{\alpha}-0}{\Delta x}=+\infty,$$

$$y'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\Delta x|^{\alpha}-0}{\Delta x}=-\infty.$$

故在 $(0,0)$ 点曲线与 Oy 轴相切.

(2) 当 $1<\alpha<+\infty$ 时在 $x=0$ 处有

$$y'\big|_{x=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^{\alpha}-0}{\Delta x}=0.$$

故在(0,0)点曲线与 Ox 轴相切.

【1063.2】 证明:对于函数

$$y=\begin{cases}|x|^{\alpha}, & 若\ \alpha\neq 0, x\neq 0,\\ 1, & 若\ x=0.\end{cases}$$

的图形,经过点 $A(0,1)$ 的割线的极限位置是 Oy 轴.

证 当 $\alpha>0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0}|x|^{\alpha}=0$,故当 $x\to 0$ 时经过 $A(0,1)$ 的割线的极限位置是通过 $A(0,1)$ 和 $O(0,0)$ 的直线,即 Oy 轴.当 $\alpha<0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0}|x|^{\alpha}=\infty$,故当 $x\to 0$ 时经过 $A(0,1)$ 点的割线,其斜率趋于 ∞.因此其极限位置为 Oy 轴.

【1064】 确定曲线

(1) $y=\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}$ 在点 $x=0$ 处;

(2) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ 在点 $x=1$ 处.

左切线和右切线之间的夹角.

解 (1) 函数在 $x=0$ 点的左、右导数分别为

$$y'_-(0)=\lim_{x\to -0}\frac{\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to -0}\left[-\sqrt{\frac{e^{-a^2x^2}-1}{-a^2x^2}\cdot a^2}\right]=-|a|,$$

$$y'_+(0)=\lim_{x\to +0}\frac{\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to +0}\sqrt{\frac{e^{-a^2x^2}-1}{-a^2x^2}\cdot a^2}=|a|,$$

所以在 $x=0$ 处,左、右切线的夹角 θ 满足

$$\tan\theta=\frac{2|a|}{a^2-1},$$

即 $$\theta=2\arctan\frac{1}{|a|}.$$

(2) 函数在 $x=1$ 处的左、右导数分别为

$$y'_-(1)=\lim_{x\to1-0}\frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-\arcsin1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{-\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot\frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{1-x}=1,$$

$$y'_+(0)=\lim_{x\to+0}\frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-\arcsin1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{-\arcsin\frac{x^2-1}{1+x^2}}{x-1}=-1.$$

因此左、右切线的斜率互为负倒数，故，左、右切线的夹角为$\frac{\pi}{2}$.

【1065】 证明：对数螺线 $r=ae^{m\varphi}$（a 和 m— 常数）的切线与切点向量径形成固定的角度.

证 设切线与切点的向经所成的角为 β，由于

$r=ae^{m\varphi}$，$r'=mae^{m\varphi}$.

所以 $\tan\beta=\frac{r}{r'}=\frac{1}{m}$ 为一常数，故 β 为一常量.

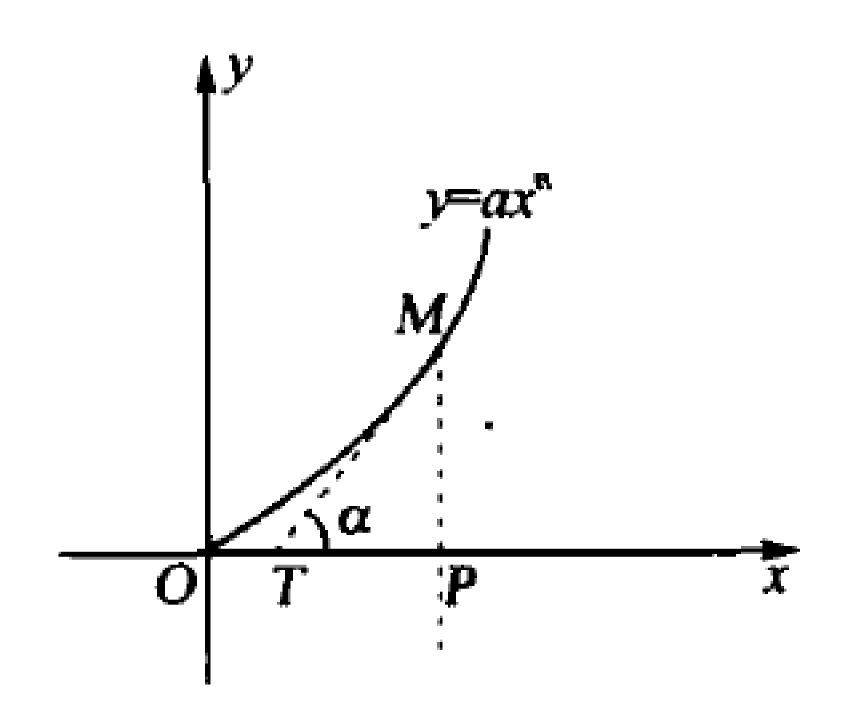
【1066】 确定曲线 $y=ax^n$ 的次切线长度，并由此给出作此曲线的切线的方法.

解 设在曲线上的任一点 $M(x,y)$ 的次切线长为 l_T，如1066题图所示

$$l_T=|PT|=\left|\frac{y}{\tan\alpha}\right|=\left|\frac{y}{y'}\right|=\left|\frac{ax^n}{nax^{n-1}}\right|=\left|\frac{x}{n}\right|.$$

因此，我们可以按如下的方法作该曲线在点 $M(x,y)$ 的切线：对于曲线上任一点 $M(x,y)$，过此点作垂直于 Ox 轴的直线，垂足为 P.

若在 P 点有 $yy'>0$，则在 P 点的左侧取点 T，使 $|PT|=$



1066 题图

$\frac{|x|}{n}$;反之,则 P 点的右侧取点 T,

使 $|PT| = \frac{|x|}{n}$. 然后联接 MT,则 MT 就是所求的切线.

【1067】 证明:抛物线 $y^2 = 2px$ 的

(1) 次切线长等于切点横坐标的两倍;

(2) 次法线为一常量.

给出作抛物线切线的方法.

证 (1) 因为 $2yy' = 2p$ 次切线长为

$$l_T = |PT| = \left|\frac{y}{y'}\right| = \left|\frac{y}{\frac{p}{y}}\right| = \left|\frac{y^2}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{2px}{p}\right| = 2|x|.$$

所以次切线长为切点横坐标的两倍.

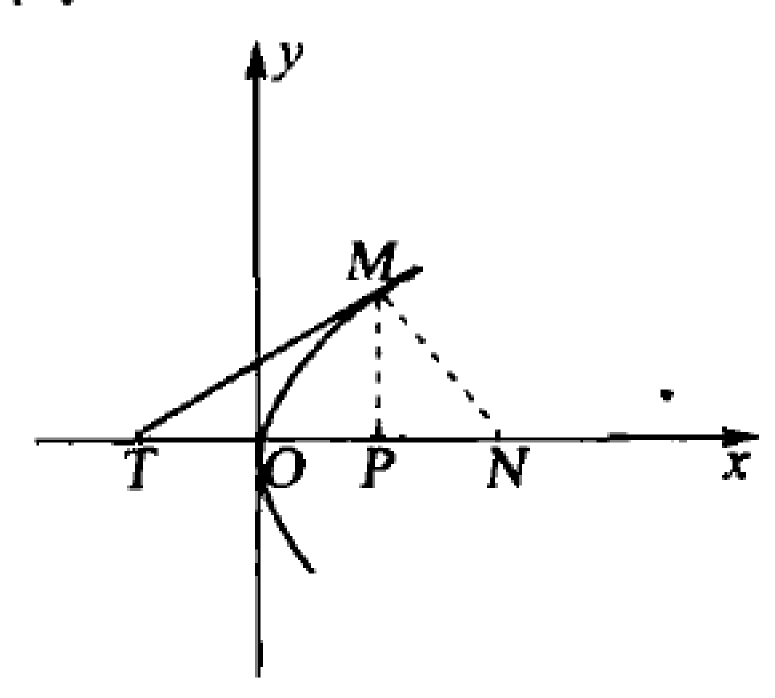
(2) 次法线长为

$$l_N = |PN| = |yy'| = \left|y \cdot \frac{p}{y}\right| = p.$$

所以,次法线长为一常量.

因此,可按下面的方法作抛物线的切线:由曲线 $y^2 = 2px$ 上的任一点 $M(x,y)$ 作垂直于 Ox 轴的垂线,垂足为 P,由 $yy' = P$,故当 $P>0(P<0)$ 时,在 Ox 轴上 P 点的左(右)侧取点 T,使 $|PT| = 2|x|$,联结 TM,直线 MT 即为所求切线.

如 1067 题图所示.



1067 题图

【1068】 证明：指数曲线 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的次切线为一常量，给出作指数曲线切线的方法.

证　次切线长为

$$l_T=|PT|=\left|\frac{y}{y'}\right|=\left|\frac{a^x}{a^x\ln a}\right|=\frac{1}{|\ln a|},$$

从而次切线的长为一常数.

按如下的方法作曲线的切线；对于曲线 $y=a^x(a>0)$ 上的任一点 $M(x,y)$，过该点作直线垂直于 Ox 轴，设垂足为 P. 当 $a>1$ 时，$yy'>0$，故在 Ox 轴上 P 点的左侧取点 T，使

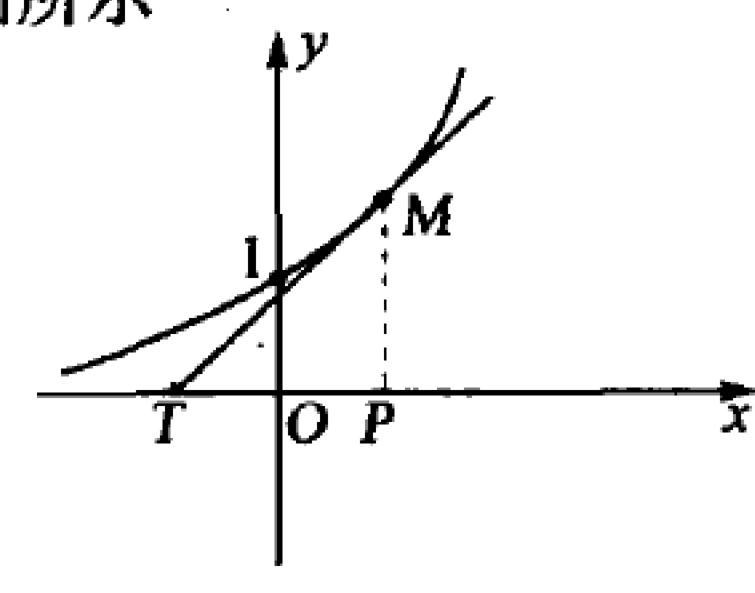
$$|PT|=\frac{1}{\ln a}.$$

当 $a<1$ 时，$yy'<0$，故在 Ox 轴上 P 点的右侧取点 T，使

$$|PT|=\frac{1}{|\ln a|},$$

连接 MT，即为所求直线.

如图 1068 题图所示



1068 题图 1

【1069】 确定悬链线 $y = a\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ 在任一点 $M(x_0, y_0)$ 的法线长.

解 法线长为 $|MN| = |y|\sqrt{1+y'^2}\,\Big|_{(x_0,y_0)}$,

又 $$y' = \mathrm{sh}\,\frac{x}{a},$$

所以 $$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}} = \left|\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\right| = \left|\frac{y}{a}\right|.$$

故 $$|MN| = |y_0|\cdot\left|\frac{y_0}{a}\right| = \frac{y_0^2}{|a|} \quad (a \neq 0).$$

【1070】 证明:内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$ 的介于坐标轴之间的切线段长度是一常量.

证 在方程 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 两边对 x 求导得

$$y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}},$$

故在曲线上任一点 $M_0(x_0, y_0)(x_0 \neq 0)$ 处的切线方程为

$$y - y_0 = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x - x_0).$$

它在两坐轴上的截距分别为

$$l_x = x_0 + \sqrt[3]{x_0 y_0^2}, l_x = y_0 + \sqrt[3]{x_0^2 y_0}.$$

于是,切线在两坐标之间部分的长度为

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2},$$

而 $$\begin{aligned} l_x^2 + l_y^2 &= x_0^2 + y_0^2 + 3x_0\sqrt[3]{x_0 y_0^2} + 3y_0\sqrt[3]{x_0^2 y_0} \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 3\sqrt[3]{x_0^2 y_0^2}(\sqrt[3]{x_0^2} + \sqrt[3]{y_0^2}) \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 3\sqrt[3]{a^2 x_0^2 y_0^2} \\ &= (a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}})^3 + y_0^2 + 3\sqrt[3]{(ax_0 y_0)^2} \\ &= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} y_0^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{4}{3}} + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3a^{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}}) + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$= a^2.$$

故 $l = a$. 即内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(a > 0)$ 的切线介于坐标轴之间的部分的长为常量 a.

【1071】 若抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 Ox 轴相切，系数 a，b，c 之间是什么关系？

解 因为 $y' = 2ax + b$.

要抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 Ox 轴相切，必须 $y' = 0$. 所以

$$2x + b = 0,$$

即 $$x = -\frac{b}{2a}.$$

另一方面，切点的坐标需满足

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

即 $$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

因此 $$b^2 - 4ac = 0.$$

此即系数 a，b，c 满足的关系.

【1072】 在什么条件下，立方抛物线 $y = x^3 + px + q$ 与 Ox 轴相切？

解 因为 $y' = 3x^2 + p$，

要使曲线与 Ox 轴相切，切点的横坐标必须满足下列方程组

$$\begin{cases} 3x^2 + p = 0, & ① \\ x^3 + px + q = 0, & ② \end{cases}$$

由 ① 得 $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$，

代入 ② 得 $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{p}{3} + p\right) = -q$，

即 $$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0.$$

当 p、q 满足上述条件时，曲线与 Ox 轴相切.

【1073】 参数 a 为何值时，抛物线 $y = ax^2$ 和曲线 $y = \ln x$ 相切？

解 设两曲线的切点为(x,y),则有

$$\begin{cases} 2ax = \dfrac{1}{x}, & ① \\ ax^2 = \ln x, & ② \end{cases}$$

由①得 $x^2 = \dfrac{1}{2a} \quad (a \neq 0)$,

代入②得 $\ln x = \dfrac{1}{2}$,

即 $x = \sqrt{e}$.

因此 $a = \dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1}{2e}$.

【1074】 证明:曲线 $y = f(x)(f(x) > 0)$ 与 $y = f(x)\sin ax$ 在公共点彼此相切,其中 $f(x)$ 为可微分函数.

证 设两曲线的公共点为(x,y),则由方程组

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = f(x)\sin ax, \end{cases} \quad (f(x) > 0).$$

得 $\sin ax = 1$,其中

$$x = \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

故两曲线的交点为 $\left(\dfrac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a}, f\left(\dfrac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a}\right)\right)$,而在交点处,两曲线切线的斜率分别为

$$k_1 = f'\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a}\right),$$

$$k_2 = f'\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a}\right)\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ af\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a}\right)\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= f'\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{a}\right),$$

从而 $\qquad k_1 = k_2,$

因此，两曲线在公共点彼此相切.

【1075】 证明：双曲线族 $x^2 - y^2 = a$ 与 $xy = b$ 构成一正交网，亦即这两族的曲线成直角相交.

证 设双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 与双曲线 $xy = b$ 相交于点 $M(x, y)$，则在此点曲线 $x^2 - y^2 = a$ 的切线的斜率 k_1 满足

$$2x - 2yk_1 = 0,$$

即 $\qquad k_1 = \frac{x}{y}.$

在同一点曲线 $xy = b$ 的切线的斜率 k_2 满足 $y + xk_2 = 0$,

所以 $\qquad k_2 = -\frac{y}{x}.$

因此 $\qquad k_1 \cdot k_2 = \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{x}\right) = -1.$

即此两切线垂直. 即两双曲线在交点垂直，两曲线族成一正交网.

【1076】 证明：抛物线族 $y^2 = 4a(a-x)(a>0)$ 与 $y^2 = 4b(b+x)(b>0)$ 构成正交网.

证 设抛物线 $y^2 = 4a(a-x)$ 与抛物线 $y^2 = 4b(b+x)$ 相交于 $M(x,y)$ 点. 则在此点曲线 $y^2 = 4a(a-x)$ 的切线斜率 k_1 满足 $2yk_1 = -4a$,

所以 $\qquad k_1 = -\frac{2a}{y}.$

在同一点曲线 $y^2 = 4b(b+x)$ 的切线斜率 k_2 满足 $2yk_2 = 4b$,

所以 $\qquad k_2 = \frac{2b}{y}.$

因此 $\qquad k_1k_2 = -\frac{4ab}{y^2},$

又点 $M(x,y)$ 位于两条双曲线上，故

$$4a(a-x) = 4b(b+x).$$

解之得 $x = a - b$.

所以 $y^2 = 4a[a-(a-b)] = 4ab$.

故 $k_1k_2 = -\dfrac{4ab}{y^2} = -1$.

故两切线正交. 因此,该两抛物线族构成正交网.

【1077】 写出曲线

$$x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$$

在点(1)$t=0$;(2) $t=1$ 处的切线和法线的方程.

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3-3t^2}{2-2t} = \dfrac{3}{2}(1+t)$.

(1) 当 $t=0$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2},$$

因此切线方程为 $y = \dfrac{3}{2}x$,

即 $3x - 2y = 0$.

法线方程为 $y = -\dfrac{2}{3}x$,

即 $2x + 3y = 0$.

(2) 当 $t=1$ 时,

$$x = 1, y = 2, \frac{dy}{dx} = 3,$$

故切线方程为 $y - 2 = 3(x-1)$,

即 $3x - y - 1 = 0$.

法线方程为 $y - 2 = -\dfrac{1}{3}(x-1)$,

即 $x + 3y - 7 = 0$.

【1078】 写出曲线 $x = \dfrac{2t+t^2}{1+t^3}, y = \dfrac{2t-t^2}{1+t^3}$ 在各点(1) $t=0$;(2) $t=1$;(3) $t=\infty$ 处的切线和法线方程.

解
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{(2-2t)(1+t^3)-(2t-t^2)3t^2}{(1+t^3)^2}}{\dfrac{(2+2t)(1+t^3)-(2t+t^2)3t^2}{(1+t^3)^2}}$$

$$= \frac{2 - 2t - 4t^3 + t^4}{2 + 2t - 4t^3 - t^4}.$$

(1) 当 $t = 0$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 1,$$

切线方程为 $y = x$.
法线方程为 $y = -x$.

(2) 当 $t = 1$ 时,

$$x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}, \frac{dy}{dx} = 3,$$

切线方程为 $y - \frac{1}{2} = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)$,

即 $\quad 3x - y - 4 = 0.$

法线方程为 $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)$,

即 $\quad x + 3y - 3 = 0.$

(3) 当 $t = \infty$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = -1,$$

(注意:此时是考虑 $t \to \infty$ 时的极限,即当 $t \to \infty$ 时,$x \to 0, y \to 0$, $\frac{dy}{dx} \to -1$).

切线方程为 $y = -x$,
法线方程为 $y = x$.

【1079】 写出摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 在任意点 $t = t_0$ 处的切线方程. 给出作摆线的切线的方法.

解 因为

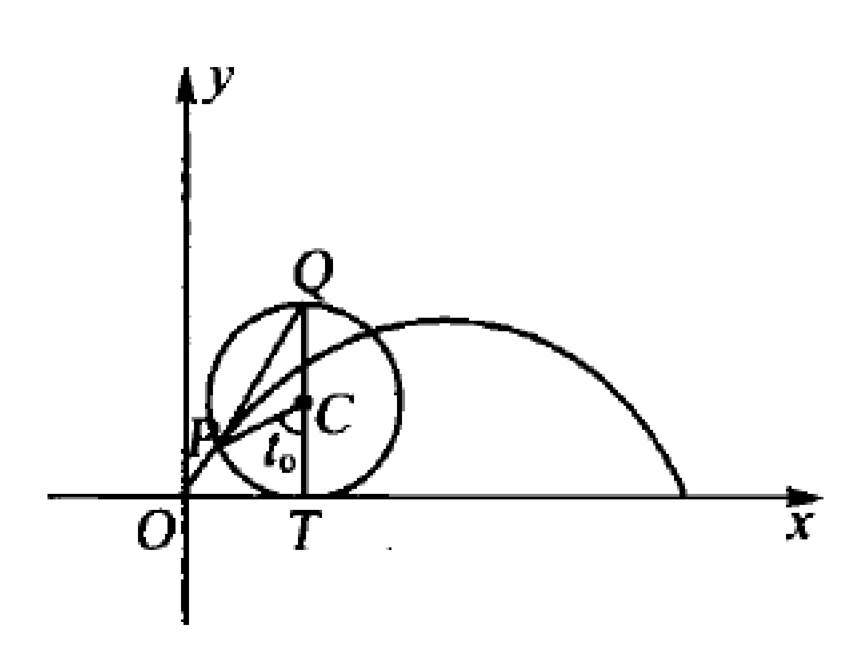
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{a\sin t}{a - a\cos t}\right|_{t=t_0} = \left.\cot\frac{t}{2}\right|_{t=t_0} = \cot\frac{t_0}{2},$$

于是,切线方程为

$$y - a(1 - \cos t_0) = \cot\frac{t_0}{2}[x - a(t_0 - \sin t_0)],$$

化简得 $y-2a=(x-at_0)\cot\frac{t_0}{2}$.

由此可知，切线通过点$(at_0,2a)$，如1079题图所示



1079 题图

$$\angle PCT=t_0,$$

而 $$OT=\overset{\frown}{TP}=at_0, TQ=2a,$$

故 Q 的坐标为$(at_0,2a)$，它在切线上.

于是摆线在 P 点的切线可如此来作，过滚动圆与极轴(Ox 轴)的接触点 T，作直线垂直于极轴(Ox 轴)，它与滚动圆相交于另一点 Q，联结 PQ. 此即所求切线.

【1080】 证明：曳物线

$$x=a\left(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t\right),$$

$$y=a\sin t \qquad (a>0,0<t<\pi)$$

具有定长的切线段.

证 切线的长 $=\left|\frac{y}{y'_x}\right|\sqrt{1+y'^2_x}$,

而 $$\frac{dy}{dx}=\frac{a\cos t}{a\left(\frac{1}{\tan\frac{t}{2}\cdot\cos^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2}-\sin t\right)}$$

$$=\frac{\cos t}{\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)}=\frac{\sin t}{\cos t}.$$

所以 $$\left|\frac{y}{y'_x}\right|\sqrt{1+(y'_x)^2}=\left|\frac{a\sin t}{\frac{\sin t}{\cos t}}\right|\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}$$

$$=|a||\cos t|\cdot\frac{1}{|\cos t|}$$

$$=|a|.$$

即曳物线有一定长为 $|a|$ 的切线段.

写出下列曲线在指定点的切线和法线方程(1081 ~ 1082).

【1081】 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1, M(6,6.4)$.

解 因为

$$y'=-\frac{64x}{100y}=-\frac{16x}{25y},$$

从而在 M 点的导数为

$$y'\Big|_{\substack{x=6\\y=6.4}}=-\frac{16\times 6}{25\times 6.4}=-\frac{3}{5}.$$

所以在 M 点的切线方程为 $y-6.4=-\frac{3}{5}(x-6)$,

即 $\qquad 3x+5y-50=0.$

法线方程为 $y-6.4=\frac{5}{3}(x-6)$,

即 $\qquad 5x-3y-10.8=0.$

【1082】 $xy+\ln y=1, M(1,1)$.

解 方程 $xy+\ln y=1$ 两边对 x 求导得

$$y+xy'_x+\frac{1}{y}y'_x=0.$$

从而 $\qquad y'_x=-\frac{y^2}{1+xy}, y'_x\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{1}{2}.$

故切线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$,

即 $\qquad x+2y-3=0.$

法线方程为 $y-1=2(x-1)$,

即 $\qquad 2x-y-1=0.$

§4. 函数的微分

1. 函数的微分 如果自变量为 x 的函数 $y=f(x)$ 的增量可用以下形式表示：

$$\Delta y = A(x)\mathrm{d}x + o(\mathrm{d}x), \mathrm{d}x = \Delta x$$

则此增量的线性部分称作函数 y 的微分：$\mathrm{d}y = A(x)\mathrm{d}x$.

函数 $y=f(x)$ 的微分存在的充要条件是存在有穷导数 $y'=f'(x)$，且有 $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$. ①

如果自变量 x 是另一新的自变量的函数，公式 ① 在这种情况下仍然有效(一阶微分形式的不变性).

2. 函数微小增量的估计 为计算可微分函数 $f(x)$ 的微小增量可利用下式

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

如果 $f'(x) \neq 0$，当 $|\Delta x|$ 足够小时，其相对误差可任意地小.

特别是，如果自变量的绝对误差等于 $|\Delta x|$，则函数 $y=f(x)$ 的绝对误差 $|\Delta y|$ 和相对误差 δ_y 用下列公式近似地表示：

$$\Delta y = |y'\Delta x|,$$

及 $$\delta y = \left|\frac{y'}{y}\Delta x\right|.$$

【1083】 设

(1) $\Delta x = 1$；(2) $\Delta x = 0.1$；(3) $\Delta x = 0.01$.

对于函数

$$f(x) = x^3 - 2x + 1,$$

求出(1) $\Delta f(1)$；(2) $\mathrm{d}f(1)$，并进行比较.

解 $\Delta f(1) = f(1+\Delta x) - f(1)$

$$= (1+\Delta x)^3 - 2(1+\Delta x) + 1 - (1-2+1)$$

$$= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

$$\mathrm{d}f(1) = f'(1)\Delta x = (3x^2-2)\big|_{x=1}\Delta x = \Delta x.$$

将所求值列表比较如下

	$\Delta f(1)$	$df(1)$
Δx	$\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$	Δx
(1) $\Delta x=1$	5	1
(2) $\Delta x=0.1$	0.131	0.1
(3) $\Delta x=0.01$	0.010301	0.01

从上表可看出,当 Δx 愈小,$\Delta f(1)$ 与 $df(1)$ 之差愈小.

【1084】 运动方程用下式表示

$$x=5t^2,$$

其中 t 以秒计,x 以米计.

若(1) $\Delta t=1$ 秒(2) $\Delta t=0.1$ 秒(3) $\Delta t=0.001$ 秒,当 $t=2$ 秒时,求出路程的增量 Δx 及路程的微分 dx,并进行比较.

解 $\Delta x=5(2+\Delta t)^2-5\cdot 2^2$

$$=20\Delta t+5(\Delta t)^2,$$

$$dx=x'_t\,|_{t=2}\Delta t=10t\,|_{t=2}\Delta t=20\Delta t.$$

(1) 当 $\Delta t=1$ 秒时,

$\Delta x=25$ 米,$dx=20$ 米.

(2) 当 $\Delta t=0.1$ 秒时,

$\Delta x=2.05$ 米,$dx=2$ 米.

(3) 当 $\Delta t=0.001$ 秒时

$\Delta x=0.020005$ 米,$dx=0.02$ 米.

由上可见,当 Δt 愈小,$|\Delta x-dx|$ 就愈小.

求下列函数 y 的微分(1085 ~ 1089).

【1085】 $y=\dfrac{1}{x}$.

解 $dy=y'dx=-\dfrac{1}{x^2}dx\qquad(x\neq 0).$

【1086】 $y=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}\qquad(a\neq 0).$

解 $y' = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2+x^2}$,

$$dy = \frac{1}{a^2+x^2}dx.$$

【1087】 $y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$.

解 $y' = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{x^2-a^2}$,

$$dy = \frac{1}{x^2-a^2}dx \qquad (x \neq \pm a).$$

【1088】 $y = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$.

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}, dy = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx.$

【1089】 $y = \arcsin\frac{x}{a} \qquad (a \neq 0)$.

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}$

$$= \frac{|a|}{a\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$dy = \frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \qquad (|x|<|a|).$$

【1090】 求下列微分：

(1) $d(xe^x)$；

(2) $d(\sin x - x\cos x)$；

(3) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$；

(4) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$；

(5) $d(\sqrt{a^2+x^2})$；

(6) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$；

(7) $d\ln(1-x^2)$；

(8) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)$；

(9) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$.

解 (1) $d(xe^x) = (xe^x)'dx = e^x(x+1)dx$.

(2) $d(\sin x - x\cos x) = (\sin x - x\cos x)'dx = x\sin x dx$.

(3) $d\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{3}{x^4}dx \quad (x \neq 0)$.

(4) $$d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' dx = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x}{x}dx$$
$$= \frac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}dx \quad (x > 0).$$

(5) $d(\sqrt{a^2+x^2}) = \frac{x dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

(6) $$d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}dx$$
$$= \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1).$$

(7) $d(\ln(1-x^2)) = -\frac{2x}{1-x^2}dx \quad (|x| < 1)$.

(8) $$d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{|x|}{x}dx$$
$$= \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1).$$

(9) $$d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$$
$$= \left[\frac{\cos^3 x + 2\sin^2 x\cos x}{2\cos^4 x} + \frac{1}{2\cos x}\right]dx$$
$$= \frac{dx}{\cos^3 x} \quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right).$$

设 u, v, w 为 x 的可微函数，求出函数 y 的微分(1091 ~ 1095).

【1091】 $y = uvw$.

解 $dy = vw du + uw dv + uv dw$.

【1092】 $y=\frac{u}{v^2}$.

解 $\mathrm{d}y=\frac{v^2\mathrm{d}u-2uv\mathrm{d}v}{v^4}=\frac{v\mathrm{d}u-2u\mathrm{d}v}{v^3}\qquad(v\neq 0).$

【1093】 $y=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

解 $\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}(2u\mathrm{d}u+2v\mathrm{d}v)$

$=-\frac{u\mathrm{d}u+v\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}\qquad(u^2+v^2\neq 0).$

【1094】 $y=\arctan\frac{u}{v}$.

解 $\mathrm{d}y=\frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{u^2+v^2}\qquad(v\neq 0).$

【1095】 $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$.

解 $\mathrm{d}y=\frac{2u\mathrm{d}u+2v\mathrm{d}v}{2(u^2+v^2)}=\frac{u\mathrm{d}u+v\mathrm{d}v}{u^2+v^2}\qquad(u^2+v^2\neq 0).$

【1096】 求下列微分：

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)$； (2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$；

(3) $\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}(\cos x)}$； (4) $\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\mathrm{d}(\cot x)}$；

(5) $\frac{\mathrm{d}(\arcsin x)}{\mathrm{d}(\arccos x)}$.

解 (1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)$

$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^3)}[x^3-2(x^3)^2-(x^3)^3]$

$=1-4x^3-3x^6.$

(2) 由$\frac{\sin x}{x}$为偶函数，故不妨设 $x>0$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2)}\left(\frac{\sin\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos\sqrt{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x^2}}\cdot\sin\sqrt{x^2}}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2x}\sin x}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3}.$$

显然，上式对 $x<0$ 时也是正确的. 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3} \qquad (x \neq 0).$$

(3) $\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}(\cos x)} = \frac{\cos x\mathrm{d}x}{-\sin x\mathrm{d}x} = -\cot x$

$$(x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

(4) $\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\mathrm{d}(\cot x)} = \frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{-\csc^2 x\mathrm{d}x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = -\tan^2 x$

$$\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right).$$

(5) $\frac{\mathrm{d}(\arcsin x)}{\mathrm{d}(\arccos x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x} = -1 \qquad (|x|<1).$

【1097】 设扇形的半径 $R = 100$ 厘米，圆心角 $\alpha = 60°$，如果(1) 其半径 R 增加 1 厘米；(2) 圆心角 α 减小 $30'$，问这个扇形的面积变化是多少？给出精确解和近似解.

解 扇形面积 $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$.

(1) 当 α 固定，R 变化时，

$$\Delta S = \frac{\alpha}{2}[(R+\Delta R)^2 - R^2]$$

$$= \alpha R\Delta R + \frac{1}{2}\alpha(\Delta R)^2,$$

$$\mathrm{d}S = R\alpha\mathrm{d}R.$$

所以当 $R = 100, \alpha = \frac{\pi}{3}, \Delta R = 1$ 时，

$$\Delta S=\frac{\pi}{6}[200+1]=105.19\text{ 平方厘米},$$

$$dS=100\cdot\frac{\pi}{3}=104.67\text{ 平方厘米(增加)}.$$

(2) 当 R 固定,α 变化时.

$$\Delta S=\frac{1}{2}R^2\Delta\alpha, dS=\frac{1}{2}R^2 d\alpha.$$

所以,当 $R=100,\alpha=\frac{\pi}{3},\Delta\alpha=-\frac{\pi}{360}$ 时,

$$\Delta S=\frac{1}{2}\cdot 100^2\cdot\left(-\frac{\pi}{360}\right)=-43.61\text{ 平方厘米},$$

$$dS=\frac{1}{2}\cdot 100^2\cdot\left(-\frac{\pi}{360}\right)=-43.61\text{ 平方厘米(减少)}.$$

【1098】 单摆的振动周期(以秒计)的计算公式是:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 l 为摆的长度(以厘米计),$g=981$ 厘米 / 秒^2 为重力加速度. 为使周期 T 增大 0.05 秒,对摆的长度 $l=20$ 厘米需作怎样改变?

解 周期 T 对摆长 l 的微分为

$$dT=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{l}}dl=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}dl,$$

将 $dT=0.05,g=981,l=20$ 代入上式得

$$dl=\frac{0.05\times\sqrt{981\times 20}}{\pi}\approx 2.23,$$

即摆长增加约 2.23 厘米.

用函数的微分代替函数的增量,求下列各式的近似值(1099 ~ 1103).

【1099】 $\sqrt[3]{1.02}$.

解 设 $f(x)=\sqrt[3]{x},x_0=1,\Delta x=0.02$

则 $$f'(x_0)=\left.\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right|_{x=1}=\frac{1}{3},$$

$$df(x_0)=f'(x_0)\Delta x\approx 0.0067,$$

于是 $\sqrt[3]{1.02}=f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+\mathrm{d}f(x_0)$

$$=1+0.0067=1.0067,$$

即 $\sqrt[3]{1.02}\approx 1.0067.$

【1100】 $\sin 29^\circ$.

解 设 $f(x)=\sin x, x_0=\frac{\pi}{6}, \Delta x=-\frac{\pi}{180}$

则

$$\sin 29^\circ\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$
$$=\sin\frac{\pi}{6}+\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{180}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.4849.$$

【1101】 $\cos 151^\circ$.

解 设 $f(x)=\cos x, x_0=\frac{5\pi}{6}$,

$$\Delta x=\frac{\pi}{180}\cos 151^\circ\approx\cos\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180}$$
$$=-0.8747.$$

【1102】 $\arctan 1.05$.

解 设 $f(x)=\arctan x, x_0=1, \Delta x=0.05$

则

$$\arctan 1.05\approx\arctan 1+\frac{1}{1+1^2}\times 0.05$$
$$=0.8104(\text{弧度}).$$

【1103】 $\lg 11$.

解 设 $f(x)=\lg x, x_0=10, \Delta x=1$

则

$$\lg 11\approx\lg 10+\frac{1}{10\ln 10}\cdot 1=1.0434.$$

【1104】 证明近似公式:$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}\quad(a>0)$,其中 $|x|\ll a$(正数 A 和 B 之间的关系 $A\ll B$ 表示 A 与 B 相比较时,A 为高阶无穷小.)

请用此公式近似地计算:

(1) $\sqrt{5}$;(2) $\sqrt{34}$;(3) $\sqrt{120}$.

并同表中的数值比较.

证 设 $f(y)=\sqrt{y}, y_0=a^2, \Delta y=x$

则 $$\sqrt{y_0+\Delta y}\approx\sqrt{y_0}+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}\Delta y \quad (当 |\Delta y|\ll\sqrt{y_0} 时),$$

即 $$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a} \quad (当 |x|\ll a 时).$$

(1) $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1}\approx 2+\frac{1}{4}=2.25$,

查表得 $\sqrt{5}\approx 2.236$.

(2) $\sqrt{34}=\sqrt{6^2-2}\approx 6-\frac{2}{12}=5.833$,

查表得 $\sqrt{34}=5.831$.

(3) $\sqrt{120}=\sqrt{11^2-1}=11-\frac{1}{22}=10.9545$,

查表得 $\sqrt{120}=10.954$.

【1104.1】 证明公式:

$$\sqrt{a^2+x}=a+\frac{x}{2a}-r \quad (a>0, x>0),$$

其中 $0<r<\frac{x^2}{8a^3}$.

证 由 1104 题我们有

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a},$$

而 $$r=a+\frac{x}{2a}-\sqrt{a^2+x}=\frac{\left(a+\frac{x}{2a}\right)^2-(a^2+x)}{a+\frac{x}{2a}+\sqrt{a^2+x}}$$

$$=\frac{x^2}{4a^2\left(a+\frac{x}{2a}+\sqrt{a^2+x}\right)},$$

当 $a>0, x>0$ 时,显然有

$$0<r<\frac{x^2}{4a^2(a+\sqrt{a^2})}=\frac{x^2}{8a^3}.$$

因此 $\sqrt{a^2+x}=a+\frac{x}{2a}-r \qquad 0<r<\frac{x^2}{8a^3}$.

【1105】 证明近似公式：

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}} \qquad (a>0)$$

其中 $|x|\ll a$. 用此公式近似地计算：

(1) $\sqrt[3]{9}$；(2) $\sqrt[4]{80}$；(3) $\sqrt[7]{100}$；(4) $\sqrt[10]{1000}$.

证 设 $f(y)=\sqrt[n]{y}, y_0=a^n, \Delta y=x$

则 $$\sqrt[n]{y_0+\Delta y}\approx\sqrt[n]{y_0}+\frac{\Delta y}{n\sqrt[n]{y_0^{n-1}}} \qquad (\text{当} |\Delta y|\ll\sqrt[n]{y_0}).$$

所以

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}} \qquad (\text{当} |x|\ll a \text{时}).$$

(1) $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{2^3+1}\approx 2+\frac{1}{3\times 2^2}=2.083$.

(2) $\sqrt[4]{80}=\sqrt[4]{3^4-1}\approx 3-\frac{1}{4\times 3^3}=2.9907$.

(3) $\sqrt[7]{100}=\sqrt[7]{2^7-28}\approx 2-\frac{28}{7\times 2^6}=1.938$.

(4) $\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}\approx 2-\frac{24}{10\times 2^9}=1.9954$.

【1106】 正方形的边长 $x=2.4$ 米 ± 0.05 米，由此来计算这个正方形面积的相对误差和绝对误差是多少？

解 正方形的面积

$$A=x^2,$$

则 $$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}=2x.$$

于是，面积的绝对误差为

$$\Delta A=2\times 2.4\cdot 0.05=0.24 \text{ 平方米},$$

相对误差为

$$\mathrm{d}A=\left|\frac{2x}{x^2}\Delta x\right|_{\substack{x=2.4\\|\Delta x|=0.05}}=2\,\frac{0.05}{2.4}=4.2\%,$$

【1107】 为了计算出球的体积精确到 1%，向测量球的半径 R 时允许发生的相对误差是多少？

解 球的体积公式为

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

从而 $\mathrm{d}V=4\pi R^2\mathrm{d}R.$

所以球体积的相对误差

$$\delta_V=\left|\frac{\mathrm{d}V}{V}\right|=\left|\frac{4\pi R^2\mathrm{d}R}{\frac{4\pi}{3}R^3}\right|=3\left|\frac{\mathrm{d}R}{R}\right|=3\delta_R.$$

因此，半径 R 允许发生的相对误差为

$$\delta_R=\frac{1}{3}\delta_V\leqslant\frac{1}{3}\times0.01=0.33\%.$$

【1108】 借助单摆的振动即利用公式 $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$（其中 l 为摆的长度，T 为摆振动的全周期）来求重力加速度. 当测量(1) 摆长 l；(2) 周期 T 有的相对误差 δ 时对 g 值有怎样的影响？

解 (1) $\delta_g=\left|\frac{\mathrm{d}g}{g}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}l}{l}\right|=\delta_l,$

即 g 的相对误差等于摆长的相对误差.

$$(2)\ \delta_g=\left|\frac{\mathrm{d}g}{g}\right|=\left|\frac{-\frac{8\pi^2 l}{T^3}\mathrm{d}T}{\frac{4\pi^2 l}{T^2}}\right|=2\left|\frac{\mathrm{d}T}{T}\right|=2\delta_T,$$

即 g 的相对误差是周期相对误差的 2 倍.

【1109】 求出数 $x(x>0)$ 的常用对数的绝对误差，设此数的相对误差等于 δ.

解 若 δ 很小，我们有

$$\ln(1+\delta)\approx\delta,$$

因而，所求的绝对误差为

$$|\lg(x+\Delta x)-\lg x|=\left|\lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right|$$

$$=|\lg(1+\delta)|=\frac{1}{\ln10}\ln(1+\delta)\approx0.434\delta.$$

【1110】 证明:用正切对数表求出的角度比用十进制同样位数的正弦对数表求出的角度更精确.

证 正切对数函数的微分为

$$d(\ln\tan\varphi) = \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \tan\varphi\cos^2\varphi} = \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \sin\varphi\cos\varphi},$$

于是 $$|d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin\varphi| \cdot |\cos\varphi| |d(\lg\tan\varphi)|, \qquad ①$$

而正弦对数函数的微分为

$$d(\lg\sin\varphi) = \frac{\cos\varphi d\varphi}{\ln 10 \cdot \sin\varphi}.$$

于是 $$|d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin\varphi| \cdot \left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| |d(\lg\sin\varphi)|, \qquad ②$$

比较①、② 两式的右端. 由于假设确定 $\lg\sin\varphi$ 与 $\lg\tan\varphi$ 时,具有同样的误差. 而

$$\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| \geqslant 1 \geqslant |\cos\varphi|,$$

故 ① 所确定的 $|d\varphi|$ 小于等于 ② 式所确定的 $|d\varphi|$.

因此,求角度时用正切对数表比用正弦对数表更精确.

§5. 高阶导数和微分

1. 基本定义 函数 $y = f(x)$ 的高阶导数由下述关系式依次确定(假设相应的运算均有意义)

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n = 2, 3\cdots).$$

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有连续导数 $f^{(n)}(x)$,则可记为:

$$f(x) \in C^{(n)}(a,b),$$

特别是,如果 $f(x)$ 在 (a,b) 区间具有各阶连续导数,则记为:

$$f(x) \in C^{(\infty)}(a,b),$$

函数 $y = f(x)$ 的高阶微分由以下公式依次确定:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) \quad (n = 2, 3\cdots),$$

其中取 $d'y = dy = y'dx$.

如果 x 为自变量,则有:

$$d^2 x = d^3 x = \cdots = 0.$$

在这种情况下，以下公式成立：

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \text{ 及 } y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2. 基本公式

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \qquad (a > 0)$；$(e^x)^{(n)} = e^x$.

(2) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

(3) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

(4) $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$.

(5) $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

3. 莱布尼茨公式 如果函数 $u = \varphi(x)$ 和 $v = \psi(x)$ 有 n 阶导数(可微分 n 次)，则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

其中 $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$ 且 C_n^i 为由 n 个元素每次取 i 个的组合数.

同样地，对微分 $d^n(uv)$ 有：

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i} u d^i v,$$

其中设 $d^0 u = u$ 且 $d^0 v = v$.

求出 y''，若(1111 ~ 1119).

【1111】 $y = x\sqrt{1+x^2}$.

解 $y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y'' = \left(\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)'$$

$$= \frac{4x\sqrt{1+x^2} - (1+2x^2)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

【1112】 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $$y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'' = \left(-\frac{3}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad (|x|<1).$$

【1113】 $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}$,

$$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2-2)e^{-x^2}.$$

【1114】 $y = \tan x$.

解 $y' = \sec^2 x$,

$$y'' = 2\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x = 2\sec^2 x \cdot \tan x$$

$$\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right).$$

【1115】 $y = (1+x^2)\arctan x$.

解 $$y' = 2x\arctan x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 2x\arctan x + 1,$$

$$y'' = 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

【1116】 $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $$y' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$+\frac{\left(\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+3x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\arcsin x}{(1-x^2)^3}$$

$$=\frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\qquad(|x|<1).$$

【1117】 $y=x\ln x$.

解 $y'=\ln x+1$.

$$y''=\frac{1}{x}\qquad(x>0).$$

【1118】 $y=\ln f(x)$.

解 $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

$$y''=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}\qquad(f(x)>0).$$

【1119】 $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$.

解 $y'=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)$

$$+x[\cos(\ln x)-\sin(\ln x)]\cdot\frac{1}{x}$$

$$=2\cos(\ln x),$$

$$y''=-\frac{2\sin(\ln x)}{x}\qquad(x>0).$$

【1120】 设 $y=e^{\sin x}\cos(\sin x)$，求 $y(0)$，$y'(0)$ 和 $y''(0)$.

解 $y(0)=1$，

又 $y'=e^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\cos(\sin x)$

$$-e^{\sin x}\cos x\cdot\sin(\sin x)$$

$$=e^{\sin x}\cos x[\cos(\sin x)-\sin\sin x],$$

$$y'(0)=e^0\cdot 1\cdot[1-0]=1,$$

$$y''=e^{\sin x}[\cos^2x\cdot\cos(\sin x)-\sin x\cos(\sin x)$$

$$-\cos^2x\sin(\sin x)-\cos^2x\sin(\sin x)$$

$$+\sin x\sin(\sin x)-\cos^2x\cos(\sin x)]$$

$$=e^{\sin x}\{-2\cos^2x\sin(\sin x)$$

$$+\sin x[\sin(\sin x)-\cos(\sin x)]\}.$$

于是 $y''(0)=e^0(0+0)=0.$

设 $u=\varphi(x)$ 和 $v=\psi(x)$ 为二次可微的函数，求 y''，设(1121～1124).

【1121】 $y=u^2.$

解 $y'=2uu',$

$$y''=2u'^2+2uu''=2(u'^2+uu'').$$

【1122】 $y=\ln\frac{u}{v}.$

解 $y'=\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v},$

$$y''=\frac{uu''-u'^2}{u^2}-\frac{vv''-v'^2}{v^2}\qquad(uv>0).$$

【1123】 $y=\sqrt{u^2+v^2}.$

解 $y'=\frac{uu'+vv'}{\sqrt{u^2+v^2}},$

$$y''=\frac{(uu''+u'^2+vv''+v'^2)\sqrt{u^2+v^2}-\frac{(uu'+vv')^2}{\sqrt{u^2+v^2}}}{u^2+v^2}$$

$$=\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-v'u)^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(u^2+v^2>0).$$

【1124】 $y=u^v\quad(u>0).$

解 $\ln y=v\ln u,$

所以 $y'=u^v\left[v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right],$

$$y''=u^v\left[v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right]^2+u^v\left[v''\ln u+\frac{v'u'}{u}+\frac{(u'v'+vu'')u-vu'^2}{u^2}\right]$$

$$=u^v\left[\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right)^2+v''\ln u+2\frac{u'v'}{u}+\frac{v}{u}u''-\frac{v}{u^2}u'^2\right].$$

设 $f(x)$ 三次为可微的函数，求出 y'' 和 y'''，设(1125～1128).

【1125】 $y = f(x^2)$.

解 $y' = 2xf'(x^2)$,

$y'' = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2)$,

$y''' = 4xf''(x^2) + 8xf''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2)$

$= 12xf''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2)$.

【1126】 $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 $y' = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$,

$y'' = \frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)$,

$y''' = -\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)$

$= -\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)$

$(x \neq 0)$.

【1127】 $y = f(e^x)$.

解 $y' = e^x f'(e^x)$,

$y'' = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$,

$y''' = e^x f'(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^{3x} f'''(e^x)$.

【1128】 $y = f(\ln x)$.

解 $y' = \frac{1}{x}f'(\ln x)$,

$y'' = -\frac{1}{x^2}f'(\ln x) + \frac{1}{x^2}f''(\ln x)$

$= \frac{1}{x^2}[f''(\ln x) - f'(\ln x)]$,

$y''' = -\frac{2}{x^3}[f''(\ln x) - f'(\ln x)] + \frac{1}{x^3}[f'''(\ln x) - f''(\ln x)]$

$= \frac{1}{x^3}[f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)]$.

【1129】 $y = f(\varphi(x))$，**其中** $\varphi(x)$ **为可多次微分的函数.**

解 $y' = \varphi'(x)f'(\varphi(x))$,

$y'' = \varphi''(x)f'(\varphi(x)) + [\varphi'(x)]^2 f''(\varphi(x))$,

$y''' = \varphi'''(x)f'(\varphi(x)) + 3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(\varphi(x)) + [\varphi'(x)]^3 f'''(\varphi(x))$.

【1130】 在以下二种情况下:

(1) x 为自变量;

(2) x 为中间变量,

求出函数 $y = e^x$ 的 $d^2 y$.

解 (1) $dy = e^x dx, d^2 y = e^x dx^2$.

(2) $dy = e^x dx, d^2 y = e^x d^2 x + e^x dx^2$.

设 x 为自变量,求 $d^2 y$,设(1131 ~ 1133).

【1131】 $y = \sqrt{1+x^2}$.

解 $dy = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$,

$$d^2 y = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' dx^2 = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx^2.$$

【1132】 $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

解 $y' = \dfrac{1}{x^2}(1-\ln x), y'' = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$.

所以 $$d^2 y = \frac{2\ln x - 3}{x^3}dx^2 \qquad (x > 0).$$

【1133】 $y = x^x$.

解 $y' = x^x(1+\ln x)$.

$$y'' = x^x\left[(1+\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right].$$

所以 $$d^2 y = x^x\left[(1+\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right]dx^2.$$

设 u 与 v 都为变量 x 的二次可微的函数,求 $d^2 y$,设(1134 ~ 1139).

【1134】 $y = uv$;

解 $dy = udv + vdu$,

$$d^2y = du \cdot dv + ud^2v + dv \cdot du + vd^2u$$
$$= ud^2v + 2du \cdot dv + vd^2u.$$

【1135】 $y = \frac{u}{v}$；

解　$dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$，

$$d^2y = \frac{v^2(dv \cdot du + vd^2u - du \cdot dv - ud^2v) - 2vdv(vdu - udv)}{v^4}$$
$$= \frac{v(vd^2u - ud^2v) - 2dv(vdu - udv)}{v^3} \qquad (v \neq 0).$$

【1136】 $y = u^m v^n$　（m 和 n 都是常数）；

解　$dy = mu^{m-1}v^n du + nu^m v^{n-1} dv$，

$$d^2y = m(m-1)u^{m-2}v^n(du)^2 + mnu^{m-1}v^{n-1}dudv$$
$$+ mu^{m-1}v^n d^2u + nmu^{m-1}v^{n-1}dudv$$
$$+ n(n-1)u^m v^{n-2}(dv)^2 + nu^m v^{n-1}d^2v$$
$$= u^{m-2}v^{n-2}[m(m-1)v^2(du)^2 + 2mnuvdu \cdot dv$$
$$+ n(n-1)u^2(dv)^2 + muv^2d^2u + nu^2vd^2v].$$

【1137】 $y = a^u$　$(a > 0)$；

解　$dy = a^u \ln a \cdot du$，

$$d^2y = a^u \ln^2 a \cdot (du)^2 + a^u \ln a \cdot d^2u$$
$$= a^u \ln a[\ln a \cdot (du)^2 + d^2u].$$

【1138】 $y = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$；

解　$dy = \frac{udu + vdv}{u^2 + v^2}$，

$$d^2y = \frac{(u^2+v^2)[(du)^2 + ud^2u + (dv)^2 + vd^2v] - 2(udu + vdv)^2}{(u^2+v^2)^2}$$
$$= \frac{(v^2 - u^2)(du)^2 - 4uvdu \cdot dv + (u^2 - v^2)(dv)^2 + (u^2+v^2)(ud^2u + vd^2v)}{(u^2+v^2)^2}$$
$$(u^2 + v^2 > 0).$$

【1139】 $y = \text{atctan}\,\frac{u}{v}$.

解　$dy = \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2} \cdot \frac{vdu - udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{u^2 + v^2}$，

$$d^2y=\frac{(u^2+v^2)(vd^2u-ud^2v)-2(udu+vdv)(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2}$$
$$=\frac{(u^2+v^2)(vd^2u-ud^2v)+2uv[(dv)^2-(du)^2]+2(u^2-v^2)dudv}{(u^2+v^2)^2}.$$

求以下用参数表示的函数 $y=y(x)$ 的导数$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}$(1140～1144).

【1140】 $x=2t-t^2, y=3t-t^3$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3(1-t^2)}{2(1-t)}=\frac{3}{2}(1+t),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{3}{2}}{2(1-t)}=\frac{3}{4(1-t)},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{dy''_{x^2}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{3}{4(1-t)^2}}{2(1-t)}=\frac{3}{8(1-t)^3}\qquad(t\neq 1).$$

【1141】 $x=a\cos t, y=a\sin t$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{a\cos t}{-a\sin t}=-\cot t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t}=-\frac{1}{a\sin^3 t},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{3\cos t}{a\sin^4 t}}{-a\sin t}=-\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$$

$$(t\neq k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

【1142】 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\dfrac{\cos\dfrac{t}{2}}{2a\sin^5\dfrac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=\frac{\cos\dfrac{t}{2}}{4a^2\sin^7\dfrac{t}{2}}$$

$$(t\neq 2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

【1143】 $x=e^t\cos t,y=e^t\sin t.$

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{e^t(\sin t+\cos t)}{e^t(\cos t-\sin t)}=\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+t\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)}}{e^t(\cos t-\sin t)}=\frac{1}{\sqrt{2}e^t\cos^3\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\left[-\dfrac{1}{\cos^3\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)}+3\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)}{\cos^4\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)}\right]}{e^t(\cos t-\sin t)}$$

$$=\frac{e^{-2t}\left[3\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)\right]}{2\cos^5\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)}$$

$$\left(t\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

【1144】 $x=f'(t),y=tf'(t)-f(t).$

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{f''(t)},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^2}}{f''(t)}=-\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}\qquad(f''(t)\neq 0).$$

【1145】 假设函数 $y=f(x)$ 可微分若干次,求出反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的导数 $x',x'',x''',x^{(4)}$(假定这些导数都存在);

解 $x'=\frac{1}{y'}=\frac{1}{f'(x)},$

$$x''=-\frac{1}{f'(x)^2}\cdot f''(x)\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{f'(x)^3},$$

$$x'''=-\frac{f'''(x)\frac{dx}{dy}f'(x)^3-3f'(x)^2\cdot f''(x)\cdot\frac{dx}{dy}\cdot f''(x)}{f'(x)^6}$$

$$=-\frac{f'''(x)\cdot\frac{1}{f'(x)}f'(x)^3-3f'(x)^2\cdot f''(x)^2\cdot\frac{1}{f'(x)}}{f'(x)^6}$$

$$=\frac{3f''(x)^2-f'(x)f'''(x)}{f'(x)^5},$$

$$x^{(4)}=\frac{f'(x)^5\left(6f''(x)f'''(x)\cdot\frac{1}{f'(x)}-f''(x)f'''(x)\cdot\frac{1}{f'(x)}-f'(x)f^{(4)}(x)\cdot\frac{1}{f'(x)}\right)}{f'(x)^{10}}$$

$$\frac{-5f'(x)^4f''(x)\cdot\frac{1}{f'(x)}(3f''(x)^2-f'(x)f'''(x))}{f'(x)^{10}}$$

$$=\frac{10f'(x)f''(x)f'''(x)-15f''(x)^2-f'(x)^2f^{(4)}(x)}{f'(x)^7}$$

$$(f'(x)\neq 0).$$

求出由以下隐函数给出的函数 $y=y(x)$ 的 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}$.

【1146】 $x^2+y^2=25$

在点 $M(3,4)$ 上 y',y'' 和 y''' 等于多少?

解 $y'=-\frac{x}{y},$

$$y''=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{y+\frac{x^2}{y}}{y^2}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{25}{y^3},$$

$$y'''=\frac{75\cdot y'}{y^4}=-\frac{75x}{y^5},$$

在点 $M(3,4)$，有

$$y'\bigg|_{\substack{x=3\\y=4}}=-\frac{3}{4},\ y''\bigg|_{\substack{x=3\\y=4}}=-\frac{25}{64},$$

$$y'''\bigg|_{\substack{x=3\\y=4}}=-\frac{75\times 3}{4^5}=-\frac{225}{1024}.$$

【1147】 $y^2=2px$.

解 $y'=\dfrac{p}{y}$,

$$y''=-\frac{p}{y^2}\cdot y'=-\frac{p^2}{y^3},$$

$$y'''=\frac{3p^2}{y^4}\cdot y'=\frac{3p^3}{y^5}\qquad (y\neq 0).$$

【1148】 $x^2-xy+y^2=1$

解 方程两边对 x 求导数得

$$2x-y-xy'+2yy'=0, \qquad ①$$

$$y'=\frac{2x-y}{x-2y}, \qquad ②$$

① 式两边再对 x 求导数得

$$2-2y'-xy''+2y'^2+2yy''=0, \qquad ③$$

将 ② 式代入 ③ 式得

$$y''=\frac{6}{(x-2y)^3}, \qquad ④$$

③ 式两边再对 x 求导数得

$$-3y''-xy'''+6y'y''+2yy'''=0, \qquad ⑤$$

将 ② 式及 ④ 式代入 ⑤ 式，得

$$y'''=\frac{54x}{(x-2y)^5}\qquad (x\neq 2y).$$

求出 y'_x 和 y''_x. 如果:

【1149】 $y^2+2\ln y=x^4$.

解 对 x 求导数得

$$2yy'+2\frac{y'}{y}=4x^3, \qquad ①$$

$$y'=\frac{2x^3y}{1+y^2},$$

① 式两边再对 x 求导数得

$$2y'^2+2yy''+2\frac{y''}{y}-\frac{2y'^2}{y^2}=12x^2.$$

所以 $$y''=\frac{2x^2y}{(1+y^2)^3}[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)].$$

【1150】 $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\arctan\frac{y}{x}}\qquad(a>0)$.

解 取对数得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln a+\arctan\frac{y}{x}.$$

上式两边对 x 求导数得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2},$$

于是 $$y'=\frac{x+y}{x-y},$$

上式再对 x 求导数得

$$y''=\frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{2xy'-2y}{(x-y)^2}=\frac{2x\frac{x+y}{x-y}-2y}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}\qquad(x\neq y,x\neq 0).$$

【1151】 假设函数 $f(x)$ 在 $x\leqslant x_0$ 时有定义且可微分二次，为了使函数

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & 若\ x\leqslant x_0,\\ a(x-x_0)+b(x-x_0)+c, & 若\ x>x_0,\end{cases}$$

是可微分二次的函数，应该如何选择系数 a,b 和 c?

解　按题设，我们有

$$F(x_0+0)=F(x_0-0),$$
$$F'(x_0+0)=F'(x_0-0),$$
$$F''(x_0+0)=F''(x_0-0).$$

而
$$F(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}F(x)$$
$$=\lim_{x\to x_0+0}(a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c)$$
$$=c,$$
$$F(x_0-0)=f(x_0).$$

于是　$c=f(x_0)$,

又　$F'(x_0+0)=[2a(x-x_0)+b]\big|_{x=x_0}=b$,

$F'(x_0-0)=f'(x_0)$.

从而　$b=f'(x_0)$,

$F''(x_0+0)=2a, F''(x_0-0)=f''(x_0)$.

从而　$a=\dfrac{1}{2}f''(x_0)$.

【1152】　某点作直线运动的规律是：

$$S=10+20t-5t^2,$$

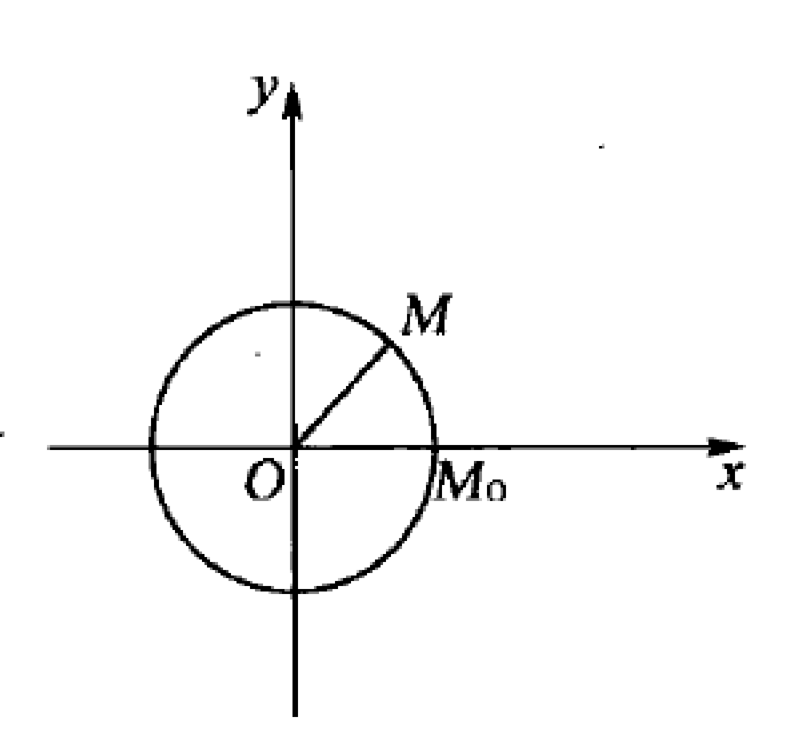
求该点运动速度和加速度. 当 $t=2$ 时它的速度和加速度等于多少?

解　速度 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=20-10t, v\big|_{t=2}=0$,

加速度 $a=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-10, a\big|_{t=2}=-10$.

【1153】　点 $M(x,y)$ 沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 均匀地运动，每 T 秒走完一圈. 求出点 M 在 Ox 轴上投影的速度 v 和加速度 j. 设 $t=0$ 时点的位置在 $M_0(a,0)$.

解 由于 $\angle M_0OM = \frac{2\pi}{T}t$，从而 $x = a\cos\frac{2\pi}{T}t$，



1153 题图

于是速度为 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\pi a}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t$，

加速度为 $j = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4\pi^2a}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t$.

【1154】 质点$M(x,y)$在铅直平面Oxy内与水平面成α角的方向以初始速度v_0抛出，建立(空气阻力略去不计)运动方程式并求速度v及加速度j，以及运动轨道. 问最大的高度和射程等于多少?

解 不考虑空气阻力，运动方程为

$$x = v_0t\cos\alpha, y = v_0t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

化为直角坐标系为

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

所以，轨道为一抛物线，速度为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)} \\ &= \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0gt\sin\alpha}, \end{aligned}$$

加速度为 $j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

$$= \sqrt{0 + (-g)^2} = g,$$

又 $$\frac{dy}{dx} = \tan x - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

在最高处有$\frac{dy}{dx} = 0$,

即 $$\tan\alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0.$$

所以 $$x = \frac{v_0^2 \sin x \cos\alpha}{g},$$

于是最大高度为

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} \cdot \left(\frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

在最大射程处有 $y = 0$,

即 $$x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 0.$$

解得 $$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

从而最大射程为$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

【1155】 点运动的方程为:$x = 4\sin\omega t - 3\cos\omega t$,$y = 3\sin\omega t + 4\cos\omega t$($\omega$ 是常数),确定点的运动轨道,速度和加速度值.

解 因为

$$x^2 + y^2 = (4\sin\omega t - 3\cos\omega t)^2 + (3\sin\omega t - 4\cos\omega t)^2$$

$$= 25(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) = 25.$$

所以,运动轨道是以原点为中心,5 为半径的圆,运动的速度,加速度分别为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(4\omega\cos\omega t + 3\omega\sin\omega t)^2 + (3\omega\cos\omega t - 4\omega\sin\omega t)^2}$$

$$= 5|\omega|,$$

$$j=\sqrt{j_x^2+j_y^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{(-4\omega^2\sin\omega t+3\omega^2\cos\omega t)^2+(-3\omega^2\sin\omega t-4\omega^2\cos\omega t)^2}$$
$$=5\omega^2.$$

求下列指定阶的导数(1156 ~ 1170).

【1156】 $y=x(2x-1)^2(x+3)^3$,求 $y^{(6)}$ 和 $y^{(7)}$.

解 $y=4x^6+a_5x^5+\cdots+a_0$,

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_5$ 为常数,所以

$$y^{(6)}=4\cdot 6!=2880,y^{(7)}=0.$$

【1157】 $y=\frac{a}{x^m}$,求出 y'''.

解 $y'=-amx^{-m-1}$,

$$y''=am(m+1)x^{-m-2},$$
$$y'''=-am(m+1)(m+2)x^{-m-3}$$
$$=-\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}\qquad(x\neq 0).$$

【1158】 $y=\sqrt{x}$,求 $y^{(10)}$.

解 $y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,

$$y^{(10)}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$\left(-\frac{11}{2}\right)\left(-\frac{13}{2}\right)\left(-\frac{15}{2}\right)\left(-\frac{17}{2}\right)x^{-\frac{19}{2}}$$
$$=-\frac{17!!}{2^{10}x^9\sqrt{x}}\qquad(x>0),$$

其中 $17!!=1\cdot 3\cdot\cdots\cdot 17$.

【1159】 $y=\frac{x^2}{1-x}$,求 $y^{(8)}$.

解 $y=\frac{x^2-1+1}{1-x}=-(x+1)+\frac{1}{1-x}$,

$$y' = -1 + \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$y'' = \frac{2}{(1-x)^3}, \cdots,$$

$$y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9} \qquad (x \neq 1).$$

【1160】 $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$,求 $y^{(100)}$.

解 $y = (1+x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}$,

由莱布尼兹公式得

$$y^{(100)} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k} (1+x)^{(k)} [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(100-k)}$$

$$= (1+x)[(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(100)} + C_{100}^{1}[(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(99)}$$

$$= (1+x)\frac{199!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{201}{2}} + 100 \cdot \frac{197!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{199}{2}}$$

$$= \frac{197!! \cdot (399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}} \qquad (x<1).$$

【1161】 $y = x^2 e^{2x}$,求 $y^{(20)}$.

解 由莱布尼兹公式可得

$$y^{(20)} = x^2(e^{2x})^{(20)} + C_{20}^{1} \cdot 2x \cdot (e^{2x})^{(19)} + C_{20}^{2} \cdot 2 \cdot (e^{2x})^{(18)}$$

$$= 2^{20}x^2 e^{2x} + 2^{20} \cdot 20 \cdot x \cdot e^{2x} + 10 \cdot 19 \cdot 2^{19} e^{2x}$$

$$= 2^{20} e^{2x}(x^2 + 20x + 95).$$

【1162】 $y = \dfrac{e^x}{x}$,求 $y^{(10)}$.

解 $$y^{(10)} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k} (e^x)^{(k)} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{(10-k)}$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \frac{10!}{(10-k)!} \frac{1}{x^{k+1}} \qquad (x \neq 0).$$

【1163】 $y = x\ln x$,求 $y^{(5)}$.

解 $y' = 1 + \ln x, y'' = \dfrac{1}{x}$,

$$y^{(5)}=\left(\frac{1}{x}\right)'''=-\frac{3!}{x^4}\qquad(x>0).$$

【1164】 $y=\dfrac{\ln x}{x}$,求 $y^{(5)}$.

解 $$y^{(5)}=\sum_{k=0}^{5}C_5^k(\ln x)^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(5-k)}$$
$$=-\frac{5!}{x^6}\ln x+5\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{4!}{x^5}+10\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{3!}{x^4}\right)$$
$$+10\left(\frac{2!}{x^3}\right)\left(\frac{2!}{x^3}\right)+5\left(-\frac{3!}{x^4}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{4!}{x^5}\cdot\frac{1}{x}$$
$$=\frac{274-120\ln x}{x^6}\qquad(x>0).$$

【1165】 $y=x^2\sin 2x$,求 $y^{(50)}$.

解 $$y^{(50)}=\sum_{k=0}^{50}C_{50}^k(x^2)^{(k)}(\sin 2x)^{(50-k)}$$
$$=x^2(\sin 2x)^{(50)}+50\cdot 2x(\sin 2x)^{(49)}$$
$$+\frac{50\cdot 49}{1\cdot 2}\cdot 2(\sin 2x)^{(48)}$$
$$=2^{50}x^2\sin\left(2x+\frac{50}{2}\pi\right)+100x\cdot 2^{49}\sin\left(2x+\frac{49}{2}\pi\right)$$
$$+\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2^{49}\sin\left(2x+\frac{48}{2}\pi\right)$$
$$=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x\right).$$

【1166】 $y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$,求 y'''.

解 $$y'''=\cos 3x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)'''+C_3^1(\cos 3x)'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)''$$
$$+C_3^2(\cos 3x)''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)'+(\cos 3x)'''\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}$$
$$=-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)(-3)^3\cdot\frac{\cos 3x}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}$$

$$+3(-3\sin 3x)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(-3)^2$$

$$\cdot\frac{1}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}+3(-3^2\cos 3x)\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$(-3)\frac{1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}}+3^3\sin 3x\cdot\frac{1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{28-27(1-3x)^2}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}\cos 3x+\frac{27(1-3x)^2-36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}\sin 3x$$

$$\left(x\neq\frac{1}{3}\right).$$

【1167】 $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$，求 $y^{(10)}$.

解　利用三角函数积化和、差公式得

$$y=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x,$$

于是

$$y^{(10)}=\frac{1}{4}\cdot 4^{10}\sin\left(4x+\frac{10}{2}\pi\right)-\frac{1}{4}\cdot 6^{10}\sin\left(6x+\frac{10}{2}\pi\right)$$

$$+\frac{1}{4}\cdot 2^{10}\cdot\sin\left(2x+\frac{10}{2}\pi\right)$$

$$=-4^9\sin 4x+2^8\cdot 3^{10}\cdot\sin 6x-2^8\sin 2x.$$

【1168】 $y=x\operatorname{sh}x$，求 $y^{(100)}$.

解

$$y^{(100)}=x(\operatorname{sh}x)^{(100)}+C_{100}^1(\operatorname{sh}x)^{(99)}$$

$$=x\operatorname{sh}x+100\operatorname{ch}x.$$

【1169】 $y=e^x\cos x$，求 y^4.

解

$$y'=e^x(\cos x-\sin x),$$

$$y''=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)$$

$$=-2e^x\sin x,$$

$$y'''=-2e^x(\sin x+\cos x),$$

$$y^{(4)}=-2e^x(\sin x+\cos x)-2e^x(\cos x-\sin x)$$

$$=-4e^x\cos x.$$

【1170】 $y=\sin^2 x\ln x$，求出 $y^{(6)}$.

解 $y=\frac{1-\cos 2x}{2}\ln x$

$=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cos 2x\cdot\ln x,$

$y^{(6)}=\frac{(-1)^5}{2}\frac{5!}{x^6}-\frac{1}{2}(\cos 2x\ln x)^{(6)}$

$=-\frac{60}{x^6}-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{6}C_6^k(\cos 2x)^{(k)}(\ln x)^{(6-k)}\right]$

$=-\frac{60}{x^6}+\left(\frac{144}{x^5}-\frac{160}{x^3}+\frac{96}{x}\right)\sin 2x$

$+\left(\frac{60}{x^6}-\frac{180}{x^4}+\frac{120}{x^2}+32\ln x\right)\cos 2x \qquad (x>0).$

在以下各题中，设 x 视为自变量，求出指定阶的微分(1171 ～ 1175).

【1171】 $y=x^5$，求出 d^5y.

解 $d^5y=5!dx^5=120dx^5$.

【1172】 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$，求出 d^3y.

解 $y'''=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}}$

$=-\frac{15}{8x^3\sqrt{x}} \qquad (x>0).$

所以 $d^3y=-\frac{15}{8x^3\sqrt{x}}dx^3 \qquad (x>0).$

【1173】 $y=x\cos 2x$，求 $d^{10}y$.

解 $y^{(10)}=x(\cos 2x)^{(10)}+C_{10}^1(\cos 2x)^{(9)}$

$=2^{10}x\cos\left(2x+\frac{10}{2}\pi\right)$

$+10\cdot 2^9\cos\left(2x+\frac{9}{2}\pi\right).$

所以 $d^{10}y=-2^{10}(5\sin 2x+x\cos 2x)dx^{10}$.

【1174】 $y=e^x\ln x$,求 d^4y.

解 $$y^{(4)}=(e^x)^{(4)}\ln x+C_4^1(e^x)^{(1)}(\ln x)'+C_4^2(e^x)''(\ln x)''+C_4^3(e^x)'(\ln x)'''+e^x(\ln x)^{(4)}$$
$$=e^x\left(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right).$$

所以 $$d^4y=e^x\left(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4.$$

【1175】 $y=\cos x\cdot \mathrm{ch}x$,求出 d^6y.

解 $$y^{(6)}=\sum_{k=0}^{6}C_6^k(\cos x)^{(k)}(\mathrm{ch}x)^{(6-k)}$$
$$=\cos x\,\mathrm{ch}x+6\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{sh}x+15\cos\left(x+\frac{2}{2}\pi\right)\mathrm{ch}x$$
$$+20\cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)\mathrm{sh}x+15\cos\left(x+\frac{4}{2}\pi\right)\mathrm{ch}x$$
$$+6\cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)\mathrm{sh}x+\cos\left(x+\frac{6}{2}\pi\right)\mathrm{ch}x$$
$$=8\sin x\,\mathrm{sh}x.$$

所以 $$d^6y=8\sin x\,\mathrm{sh}x\,dx^6.$$

如果 u 是 x 的可微分足够次的函数,在以下各题中求出指定阶的微分(1176 ~ 1178).

【1176】 $y=u^2$,求 $d^{10}y$.

解 $$d^{10}y=d^{10}(u\cdot u)$$
$$=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k d^k u\cdot d^{(10-k)}u$$
$$=ud^{10}u+10du\cdot d^9u+\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}d^2u\cdot d^8u$$
$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}d^3ud^7u+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d^4ud^6u$$
$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5!}(d^5u)^2+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d^6ud^4u$$
$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}d^7ud^3u+\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}d^8ud^2u$$

$$+10\mathrm{d}^9u\mathrm{d}u+u\mathrm{d}^{10}u$$

$$=2u\mathrm{d}^{10}u+20\mathrm{d}u\mathrm{d}^9u+90\mathrm{d}^2u\mathrm{d}^8u+240\mathrm{d}^3u\mathrm{d}^7u$$

$$+420\mathrm{d}^4u\mathrm{d}^6u+252(\mathrm{d}^5u)^2.$$

【1177】 $y=\mathrm{e}^u$,求 d^4y.

解 $\mathrm{d}y=\mathrm{e}^u\mathrm{d}u$,

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{e}^u(\mathrm{d}u)^2+\mathrm{e}^u\mathrm{d}^2u,$$

$$\mathrm{d}^3y=\mathrm{e}^u[(\mathrm{d}u)^3+3\mathrm{d}u\mathrm{d}^2u+\mathrm{d}^3u],$$

$$\mathrm{d}^4y=\mathrm{e}^u[(\mathrm{d}u)^4+3(\mathrm{d}u)^2\mathrm{d}^2u+\mathrm{d}u\mathrm{d}^3u]$$

$$+\mathrm{e}^u[3(\mathrm{d}u)^2\mathrm{d}^2u+3(\mathrm{d}^2u)^2+3\mathrm{d}u\mathrm{d}^3u+\mathrm{d}^4u]$$

$$=\mathrm{e}^u[(\mathrm{d}u)^4+6(\mathrm{d}u)^2\mathrm{d}^2u+3(\mathrm{d}^2u)^2+4\mathrm{d}u\mathrm{d}^3u$$

$$+\mathrm{d}^4u].$$

【1178】 $y=\ln u$,求 d^3y.

解 $\mathrm{d}y=\frac{1}{u}\mathrm{d}u$,

$$\mathrm{d}^2y=-\frac{1}{u^2}(\mathrm{d}u)^2+\frac{1}{u}\mathrm{d}^2u,$$

$$\mathrm{d}^3y=\frac{2}{u^3}(\mathrm{d}u)^3-\frac{2}{u^2}\mathrm{d}u\cdot\mathrm{d}^2u-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}^2u+\frac{1}{u}\mathrm{d}^3u$$

$$=\frac{2}{u^3}(\mathrm{d}u)^3-\frac{3}{u^2}\mathrm{d}u\cdot\mathrm{d}^2u+\frac{1}{u}\mathrm{d}^3u.$$

【1179】 由函数 $y=f(x)$ 求 d^2y,d^3y 和 d^4y(假定 x 为某个自变数的函数).

解 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$,

$$\mathrm{d}^2y=f''(x)(\mathrm{d}x)^2+f'(x)\mathrm{d}^2x,$$

$$\mathrm{d}^3y=f'''(x)(\mathrm{d}x)^3+3f''\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}^2x+f'(x)\mathrm{d}^3x,$$

$$\mathrm{d}^4y=f^{(4)}(x)(\mathrm{d}x)^4+6f'''(x)(\mathrm{d}x)^2\mathrm{d}^2x+3f''(x)(\mathrm{d}^2x)^2$$

$$+4f''(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}^3x+f'(x)\mathrm{d}^4x.$$

【1180】 不假设 x 为自变量,以变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y=f(x)$ 的导数 y'' 和 y'''.

解 $y' = \frac{dy}{dx}$,

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{(dx)^3} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{(dx)^3},$$

$$y''' = \frac{d\left(\frac{dxd^2y - dyd^2x}{(dx)^3}\right)}{dx}$$

$$= \frac{dx\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix} - 3d^2x\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{(dx)^5}.$$

【1181】 证明:函数 $y = C_1\cos x + C_2\sin x$.
满足方程式:$y'' + y = 0$,其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

证 $y' = -C_1\sin x + C_2\cos x$,

$y'' = -C_1\cos x - C_2\sin x = -y$.

所以 $y'' + y = 0$.

【1182】 证明:函数 $y = C_1\operatorname{ch}x + C_2\operatorname{sh}x$.
满足方程式:$y'' - y = 0$. 其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

证 $y' = C_1\operatorname{sh}x + C_2\operatorname{ch}x$,

$y'' = C_1\operatorname{ch}x + C_2\operatorname{sh}x = y$.

所以 $y'' - y = 0$.

【1183】 证明:函数

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x},$$

满足方程 $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0$.

其中 C_1 和 C_2 为任意常数,λ_1 和 λ_2 为常数,

证 $y' = C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x}$,

$y'' = C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 x}$,

于是 $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y$

$$= C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 x} - (\lambda_1 + \lambda_2)(C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x}) + C_1\lambda_1\lambda_2e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_1\lambda_2e^{\lambda_2 x}$$

$$= 0.$$

【1184】 证明:函数

$$y = x^n[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)]$$

满足方程 $x^2y'' + (1-2n)xy' + (1+n^2)y = 0$.

其中 C_1 和 C_2 为任意常数,n 为常数,

证 $y' = nx^{n-1}[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)] + x^{n-1}[-C_1\sin(\ln x) + C_2\cos(\ln x)]$,

$$\begin{aligned} y'' &= n(n-1)x^{n-2}[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)] \\ &\quad + (2n-1)x^{n-2}[-C_1\sin(\ln x) + C_2\cos(\ln x)] \\ &\quad + x^{n-2}[-C_1\cos(\ln x) - C_2\sin(\ln x)] \\ &= x^{n-2}\{(n^2-n-1)[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)] \\ &\quad + (2n-1)[C_2\cos(\ln x) - C_1\sin(\ln x)]\}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & x^2y'' + (1-2n)xy' + (1+n^2)y \\ &= x^n\{(n^2-n-1)[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)] \\ &\quad + (2n-1)[C_2\cos(\ln x) - C_1\sin(\ln x)] \\ &\quad + (1-2n)[n(C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x))] \\ &\quad + [C_2\cos(\ln x) - C_1\sin(\ln x)] \\ &\quad + (1+n^2)[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)]\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

【1185】 证明:函数

$$y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

满足方程 $y^{(4)} + y = 0$. 其中 C_1, C_2, C_3 和 C_4 都是任意常数.

证

$$\begin{aligned} y' &= e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{C_1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(-\frac{C_3}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_3}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_4}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned}$$

$$y'' = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{C_1}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_1}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right.$$

$$\left.-\frac{C_1}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_1}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_2}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{C_3}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_4}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_3}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_4}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{C_3}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_4}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_3}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_4}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_2\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-C_1\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(-C_4\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_3\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$y^{(4)} = (y'')''$$

$$= e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(-C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(-C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=-y,$$

故 $$y^{(4)}+y=0.$$

【1186】 证明:如果函数 $f(x)$ 有 n 阶导数,则

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

证 $[f(ax+b)]'_x = af'(ax+b)$,

$[f(ax+b)]'' = a^2 f''(ax+b)$,

$\cdots$,

$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

【1187】 如果 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$. 求出 $P^{(n)}(x)$.

解 $P'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_1$,

$P''(x) = n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-2} + \cdots + 2!a_2$,

$\cdots$,

$P^{(n)}(x) = n!a_0$.

求 $y^{(n)}$,设(1188 ~ 1210).

【1188】 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

解 $y'=\dfrac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$,

$$y''=-\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3},$$

$$y'''=\frac{(-3)(-2)\cdot c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4}=\frac{3!c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4},$$

…,

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}\qquad\left(x\neq\frac{-d}{c},c\neq 0\right).$$

【1189】 $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$.

解 $y=\dfrac{1}{x(1-x)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$,

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}$$

$$=n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]\qquad(x\neq 0,x\neq 1).$$

【1190】 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

提示:将函数分解成最简单分数

解 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}$

$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1},$$

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}$$

$$=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

$(x\neq 1,x\neq 2)$.

【1191】 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

解 $$y^{(n)}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)$$
$$\cdot(-2)^n(1-2x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$
$$=\frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}\qquad\left(x<\frac{1}{2}\right).$$

【1192】 $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

解 $$y=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}=\frac{x+1-1}{\sqrt[3]{1+x}}$$
$$=(1+x)^{\frac{2}{3}}-(1+x)^{-\frac{1}{3}},$$
$$y^{(n)}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots\left(-\frac{3n-5}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n-2}{3}}$$
$$-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots\left(-\frac{3n-2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n+1}{3}}$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}1\cdot4\cdots(3n-5)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}[2(1+x)+(3n-2)]$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}1\cdot4\cdot7\cdots(3n-5)(2x+3n)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$$
$$(n\geqslant2,x\neq-1).$$

【1193】 $y=\sin^2x$.

解 $$y'=2\sin x\cos x=\sin2x,$$
$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=(\sin2x)^{(n-1)}$$
$$=2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{n-1}{2}\pi\right).$$

【1194】 $y=\cos^2x$

解 $$y'=-2\cos x\sin x=-\sin2x,$$
$$y^{(n)}=-(\sin2x)^{(n-1)}=-2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{n-1}{2}\pi\right).$$

【1195】 $y=\sin^3x$.

解 $$y=\sin x\sin^2x$$

$$= \frac{1}{2}\sin x(1-\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x\cos 2x$$

$$= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x,$$

故 $$y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

【1196】 $y=\cos^3 x$.

解 $y = \cos x \cdot \cos^2 x$

$$= \frac{1}{2}\cos x(1+\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x \cdot \cos 2x$$

$$= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x,$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right) + \frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

【1197】 $y=\sin ax\sin bx$.

解 $y = \frac{1}{2}\cos(a-b)x - \frac{1}{2}\cos(a+b)x,$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}(a-b)^n\cos\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$

$$-\frac{1}{2}(a+b)^n\cos\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

【1198】 $y=\cos ax\cos bx$.

解 $y = \frac{1}{2}\cos(a-b)x + \frac{1}{2}\cos(a+b)x,$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}(a-b)^n\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$+\frac{1}{2}(a+b)^n\cos\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right].$$

【1199】 $y=\sin ax\cos bx$.

解 $y=\frac{1}{2}\sin(a+b)x+\frac{1}{2}\sin(a-b)x$,

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(a+b)^n\sin\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{1}{2}(a-b)^n\sin\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right].$$

【1200】 $y=\sin^2 ax\cos bx$.

解 $y=\frac{1}{2}\cos bx(1-\cos 2ax)$

$$=\frac{1}{2}\cos bx-\frac{1}{4}\cos(2a+b)x-\frac{1}{4}\cos(2a-b)x,$$

所以 $$y^{(n)}=\frac{1}{2}b^n\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}(2a+b)^n\cos\left[(2a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{1}{4}(2a-b)^n\cos\left[(2a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right].$$

【1201】 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

解 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,$$

$$y^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

【1202】 $y=x\cos ax$.

解 $y^{(n)}=x(\cos ax)^{(n)}+C_n^1(\cos ax)^{n-1}$

$$=a^n x\cos\left(ax+\frac{n}{2}\pi\right)+na^{n-1}\cos\left(ax+\frac{n-1}{2}\pi\right).$$

【1203】 $y=x^2\sin ax$.

解 $y^{(n)}=x^2(\sin ax)^{(n)}+C_n^1 2x(\sin ax)^{(n-1)}+C_n^2\cdot 2(\sin ax)^{(n-2)}$

$$=a^n x^2\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)+2na^{n-1}x\sin\left(ax+\frac{n-1}{2}\pi\right)+n(n-1)a^{n-2}\sin\left(ax+\frac{n-2}{2}\pi\right).$$

【1204】 $y=(x^2+2x+2)e^{-x}$.

解 $$y^{(n)}=(-1)^n(x^2+2x+2)e^{-x}+(-1)^{n-1}n(2x+2)e^{-x}+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2e^{-x}$$
$$=(-1)^n e^{-x}[x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)].$$

【1205】 $y=\frac{e^x}{x}$.

解 $$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}$$
$$=e^x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{x^{k+1}}\qquad(x\neq 0).$$

【1206】 $y=e^x\cos x$.

解 $$y'=e^x(\cos x-\sin x)=2^{\frac{1}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$
$$y''=2^{\frac{1}{2}}e^x\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=2^{\frac{2}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{2\pi}{4}\right),$$

由数学归纳法可证得 $y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$.

【1207】 $y=e^x\sin x$.

解 $$y'=e^x(\sin x+\cos x)=2^{\frac{1}{2}}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$
$$y''=2^{\frac{1}{2}}e^x\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=2^{\frac{2}{2}}e^x\sin\left(x+\frac{2\pi}{4}\right),$$

由数学归纳法可证得

$$y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right).$$

【1208】 $y=\ln\frac{a+bx}{a-bx}$.

解　$y'=\frac{b}{a+bx}+\frac{b}{a-bx}$,

$$y^{(n)}=\left(\frac{b}{a+bx}\right)^{(n-1)}+\left(\frac{b}{a-bx}\right)^{(n-1)}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!b^n}{(a+bx)^n}+\frac{(n-1)!b^n}{(a-bx)^n}$$

$$\left(|x|<\left|\frac{a}{b}\right|\right).$$

【1209】　$y=e^{ax}P(x)$,其中 $P(x)$ 为多项式.

解　$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^kP^{(k)}(x)(e^{ax})^{(n-k)}$$

$$=e^{ax}[a^nP(x)+C_n^1a^{n-1}P'(x)+\cdots+P^{(n)}(x)].$$

【1210】　$y=x\text{sh}x$.

解　$$y^{(n)}=x(\text{sh}x)^{(n)}+n(\text{sh}x)^{(n-1)}$$

$$=\frac{x}{2}[e^x-(-1)^ne^{-x}]+\frac{n}{2}[e^x-(-1)^{n-1}e^{-x}]$$

$$=\frac{1}{2}[(x+n)e^x-(-1)^n(x-n)e^{-x}].$$

求 d^ny,若(1211 ～ 1212).

【1211】　$y=x^ne^x$.

解　$$y^{(n)}=e^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\cdots+n!\right].$$

所以

$$d^ny=y^{(n)}dx^n$$

$$=e^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\cdots+n!\right]dx^n.$$

【1212】　$y=\frac{\ln x}{x}$.

解　$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\ln x)^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)}$$

$$=\frac{(-1)^nn!}{x^{n+1}}\ln x+n\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\cdot\frac{1}{x}$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$+\cdots\frac{1}{x}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]\quad(x>0).$$

所以 $$d^n y=y^{(n)}dx^n$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]dx^n.$$

【1213】 证明等式：

(1) $[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)}=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi)$，

(2) $[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)}=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi)$，

其中 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

证 (1) $[e^{ax}\sin(bx+c)]'$

$=e^{ax}[a\sin(bx+c)+b\cos(bx+c)]$

$=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\left[\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+c)+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+c)\right]$

$=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin(bx+c+\varphi)$，

其中 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

$$[e^{ax}\sin(bx+c)]''=\sqrt{a^2+b^2}[e^{ax}\sin(bx+c+\varphi)]'$$
$$=(a^2+b^2)^{\frac{2}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+2\varphi),$$

$[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)}$

$=\sqrt{a^2+b^2}[e^{ax}\sin(bx+c+\varphi)]^{(n-1)}$

$=\cdots$

$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+n\varphi)$.

(2) 同理可证

$$[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi).$$

【1214】 求 $y^{(n)}$，若：

(1) $y=\operatorname{ch}ax\cos bx$；

(2) $y=\operatorname{ch}ax\sin bx$.

解 (1) $y=\frac{1}{2}e^{ax}\cos bx+\frac{1}{2}e^{-a}\cos bx$,

由 1213 题(2) 的结果知

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}[e^{ax}\cos(bx+n\varphi)$$
$$+e^{-ax}\cos(bx+n(\pi-\varphi))]$$
$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left\{e^{ax}\left[\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\cdot\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\right.\right.$$
$$\left.-\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\cdot\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right]$$
$$+e^{-ax}\left[\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$
$$\left.\left.+\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right]\right\}$$
$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{ch}ax\cdot\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$
$$\left.-\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\cdot\operatorname{sh}ax\cdot\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right].$$

(2) $y=\frac{1}{2}e^{ax}\sin bx-\frac{1}{2}e^{-ax}\sin bx$,

利用 1213 题(1) 的结果得

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}[e^{ax}\sin(bx+n\varphi)-e^{-ax}\sin(bx+n(\pi-\varphi))]$$
$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{ch}ax\cdot\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$
$$\left.+\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\operatorname{sh}ax\cdot\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right],$$

其中 $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

【1215】 将函数 $f(x)=\sin^{2p}x$(其中 p—自然数)变换为三角多项式:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p}A_k\cos 2kx,$$

以求 $f^{(n)}(x)$.

提示:假设 $\sin x = \frac{1}{2i}(t-\bar{t})$,

其中 $t=\cos x+i\sin x$ 且 $\bar{t}=\cos x-i\sin x, t\bar{t}=1$

并利用莫伊弗尔公式.

解 设 $t=\cos x+i\sin x$,

则 $$\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t}),$$

其中 $\bar{t}$ 为 t 的共轭复数.

注意到 $t\cdot\bar{t}=1$ 及 $t^k+t^{-k}=2\cos kx$ 我们有

$$\begin{aligned}\sin^{2p}x&=\frac{1}{(2i)^{2p}}(t-\bar{t})^{2p}\\&=\frac{1}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k C_{2p}^k t^{2p-k}\bar{t}^k\\&=\frac{1}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k C_{2p}^k t^{2p-2k}\\&=(-1)^p\frac{C_{2p}^p}{(2i)^{2p}}+\frac{1}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k t^{2p-2k}\\&\quad+\frac{1}{(2i)^{2p}}\sum_{k=p+1}^{2p}(-1)^k C_{2p}^k t^{2p-2k}\\&=(-1)^p\frac{C_{2p}^p}{(2i)^{2p}}+\frac{2}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k\cos(2p-2k)x.\end{aligned}$$

所以 $$\begin{aligned}&(\sin^{2p}x)^{(n)}\\&=\frac{2}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k(2p-2k)^n\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n\pi}{2}\right]\\&=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{k+p}\cdot 2^{n-2p+1}(p-k)^n C_{2p}^k\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

【1216】 求 $f^{(n)}(x)$,若:

(1) $f(x)=\sin^{2p-1}x$;

(2) $f(x)=\cos^{2p}x$;

(3) $f(x)=\cos^{2p+1}x$,

其中 p 为正整数(参阅上题)

如果

$f(x) = f_1(x) + if_2(x)$,

其中 i 为虚数单位，且 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 为实数变量 x 的实数函数，则根据定义取：$f'(x) = f'_1(x) + if'_2(x)$.

解 (1) 设 $t = \cos x + i\sin x$，

则 $$\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t}),$$

$$\sin^{2p+1} x = \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k \cdot C_{2p+1}^k t^{2p+1-k} \bar{t}^{k}$$

$$= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k C_{2p+1}^k t^{2p+1-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} 2^{-2p} C_{2p+1}^k \sin(2p+1-2k)x.$$

所以 $$(\sin^{2p+1} x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} C_{2p+1}^k \frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}} \cdot \sin\left[(2p+1-2k)x + \frac{n\pi}{2}\right].$$

类似地，我们可得：

(2) $(\cos^{2p} x)^{(n)}$
$$= \sum_{k=0}^{p-1} 2^{n-2p+1} (p-k)^n C_{2p}^k \cos\left[(2p-2k)x + \frac{n\pi}{2}\right].$$

(3) $(\cos^{2p+1} x)^{(n)}$
$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}} C_{2p+1}^k \cos\left[(2p+1-2k)x + \frac{n\pi}{2}\right].$$

【1217】 利用恒等式

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right),$$

证明：$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\text{arccot}x].$$

提示：运用莫伊弗尔公式.

证 将复数 $x+i$ 及 $x-i$ 化为三角形式

$x + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,

$x - i = r(\cos\theta - i\sin\theta)$,

其中 $r=(1+x^2)^{\frac{1}{2}},\theta=\operatorname{arccot}x$,

则 $(x+i)^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$,

$(x-i)^k=r^k(\cos k\theta-i\sin k\theta)$,

于是
$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}$$
$$=\frac{1}{2i}\left[\left(\frac{1}{x-i}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+i}\right)^{(n)}\right]$$
$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}}\right]$$
$$=\frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{n+1}}[(x+i)^{n+1}-(x-i)^{n+1}]$$
$$=\frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{n+1}}\{r^{n+1}[\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta]$$
$$-r^{n+1}[\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta]\}$$
$$=\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}}r^{n+1}\sin(n+1)\theta$$
$$=\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\operatorname{arccot}x].$$

所以
$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\operatorname{arccot}x]\quad(x\neq 0).$$

【1218】 求函数 $f(x)=\arctan x$ 的 n 阶导数.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,

由 1217 题的结果,有
$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n-1)}$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}\sin(n\operatorname{arccot}x).$$

求 $f^{(n)}(0)$,若(1219 ~ 1222).

【1219】 (1) $f(x)=\dfrac{1}{(1-2x)(1+x)}$;

(2) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.

解 (1) $f(x)=\dfrac{1}{(1-2x)(1+x)}$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1-2x}\right).$$

所以 $$f^{(n)}(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{(-n)^n n!}{(1+x)^{n+1}}+\frac{n!2^{n+1}}{(1-2x)^{n+1}}\right],$$

故 $$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{3}\left[(-1)^n+2^{n+1}\right].$$

(2) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}=-\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$,

于是 $$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}}$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

$$=\frac{(2n-3)!!}{2^n}\frac{1}{(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}}$$

$$+\frac{(2n-1)!!}{2^n}\frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

所以 $$f^{(n)}(0)=\frac{(2n-3)!!}{2^n}+\frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

$$=\frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}}\qquad(n>1).$$

【1220】 (1) $f(x)=x^2e^{ax}$;

(2) $f(x)=\arctan x$;

(3) $f(x)=\arcsin x$.

解 (1) $f^{(n)}(x)$

$$=x^2a^ne^{ax}+2nx\cdot a^{n-1}e^{ax}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2a^{n-2}e^{ax}$$

$$=a^{n-2}e^{ax}\left[a^2x^2+2nax+n(n-1)\right].$$

所以 $$f^{(n)}(0)=n(n-1)a^{n-2}.$$

(2) 由 1218 题有

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}\sin(n\operatorname{arccot}x),$$

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!\sin\frac{n\pi}{2}.$$

$$f^{(2k)}(0)=0,f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$$

$$(k=0,1,2,\cdots).$$

(3) $y'=f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

$$y''=f''(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'(0)=f'(0)=1,y''(0)=f''(0)=0,$$

并且 $(1-x^2)y''-xy'=0.$

对上式两边求 n 阶导数并应用莱布尼兹公式，有

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}=0,$$

即 $(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0.$

令 $x=0$ 代入上式得 $y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$,

因此 $y^{(2k)}(0)=f^{(2k)}(0)=0,$

$$\begin{aligned}y^{(2k+1)}(0)&=(2k-1)^2y^{(2k-1)}(0)\\&=(2k-1)^2(2k-3)^2y^{(2k-2)}(0)\\&=\cdots\\&=[(2k-1)(2k-3)\cdots1]^2y'(0)\\&=[(2k-1)!!]^2\qquad(k=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

【1221】 (1) $f(x)=\cos(m\arcsin x)$;

(2) $f(x)=\sin(m\arcsin x)$.

解 (1) $y'=-\dfrac{m}{\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arcsin x),$

$$y''=-\frac{m^2}{1-x^2}\cos(m\arcsin x)$$

$$-\frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(m\arcsin x).$$

所以 $y'(0)=0,y''(0)=-m^2,$

并且有　$(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0.$

上式两边对 x 求 n 阶导数，并利用莱布尼兹公式，得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}-xy^{(n+1)}$$
$$-ny^{(n)}+m^2y^{(n)}=0,$$

即　$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}+(m^2-n^2)y^{(n)}=0$$

令 $x=0$，得

$$y^{(n+2)}(0)=(n^2-m^2)y^{(n)}(0).$$

由于　$y'(0)=0,$

所以　$y^{(2k+1)}(0)=0\qquad(k=0,1,2,\cdots);$

又　$y''(0)=-m^2,$

所以　$$y^{(2k)}(0)$$
$$=[(2k-2)^2-m^2]y^{(2k-2)}(0)$$
$$=[(2k-2)^2-m^2][(2k-4)^2-m^2]y^{(2k-4)}(0)$$
$$=[(2k-2)^2-m^2][(2k-4)^2-m^2]\cdots[2^2-m^2](-m^2)$$
$$(k=1,2,\cdots).$$

(2) $y'=f'(x)=\dfrac{m}{\sqrt{1-x^2}}\cos(m\arcsin x),$

$$y''=f''(0)$$
$$=-\frac{m^2}{1-x^2}\sin(m\arcsin x)+\frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\cos(m\arcsin x).$$

所以　$y'(0)=f'(0)=m, y''(0)=f''(0)=0,$

并且有　$(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0.$

上式两边对 x 求 n 阶导数，并利用莱布尼兹公式得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}-xy^{(n+1)}$$
$$-ny^{(n)}+m^2y^{(n)}=0,$$

即　$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}+(m^2-n^2)y^{(n)}=0.$$

令 $x=0$，得

$$y^{(n+2)}(0)=(n^2-m^2)y^{(n)}(0).$$

由于　$y''(0)=0,$

故　$y^{(2k)}(0)=0\qquad(k=1,2,\cdots),$

又由于　$y'(0)=m,$

故 $$y^{(2k+1)}(0)=[(2k-1)^2-m^2]y^{(2k-1)}(0)$$
$$=[(2k-1)^2-m^2][(2k-3)^2-m^2]y^{(2k-3)}(0)$$
$$=\cdots$$
$$=[(2k-1)^2-m^2][(2k-3)^2-m^2]\cdots[1^2-m^2]\cdot m$$
$$(k=1,2,\cdots).$$

【1222】 (1) $f(x)=(\arctan x)^2$;

(2) $f(x)=(\arcsin x)^2$.

解 (1) 由 1220 题(2) 的结果有

$$(\arctan x)^{(2k)}\big|_{x=0}=0.$$
$$(\arctan x)^{(2k+1)}\big|_{x=0}=(-1)^k(2k)!$$

而$(2k-1)-j$ 与$j(0\leqslant j\leqslant 2k-1)$ 中有一个为偶数,故

$$f^{(2k-1)}(0)=(\arctan x\cdot\arctan x)^{(2k-1)}\big|_{x=0}$$
$$=\sum_{j=0}^{2k-1}C_{2k-1}^{j}(\arctan x)^{(j)}\cdot(\arctan x)^{(2k-1-j)}\big|_{x=0}$$
$$=0,$$

$$f^{(2k)}(0)=(\arctan x\cdot\arctan x)^{(2k)}\big|_{x=0}$$
$$=\sum_{i=0}^{2k}C_{2k}^{i}(\arctan x)^{(i)}\cdot(\arctan x)^{(2k-i)}\big|_{x=0}$$
$$=\sum_{i=0}^{k-1}C_{2k}^{2i+1}(\arctan x)^{(2i+1)}\cdot(\arctan x)^{(2k-2i-1)}\big|_{x=0}$$
$$=\sum_{i=0}^{k-1}C_{2k}^{2i+1}(-1)^i(2i)!(-1)^{k-i-1}(2k-2i-2)!$$
$$=(-1)^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(2k)!}{(2i+1)!(2k-2i-1)!}$$
$$\cdot(2i)!(2k-2i-2)!$$
$$=(-1)^{k-1}(2k)!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(2i+1)(2k-2i-1)}$$
$$=(-1)^{k-1}(2k)!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{2k-2i-1}\right)$$
$$=(-1)^k(2k-1)!\cdot 2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\frac{1}{2k-1}\right)$$
$$(k=1,2,\cdots).$$

(2) $f'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$,

即 $$\sqrt{1-x^2}f'(x) = 2\arcsin x.$$

上式两边再对 x 求导得

$$\sqrt{1-x^2}f''(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

即 $$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) - 2 = 0.$$

上式两边再对 x 求 n 阶导数,并利用莱布尼兹公式得

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nxf^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x)$$
$$-xf^{(n+1)}(x) - nf^{(n)}(x) = 0,$$

即 $$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0.$$

令 $x=0$,得

$$f^{(n+2)}(0) = n^2f^{(n)}(0),$$

而 $$f'(0) = 0, f''(0) = 2.$$

所以 $$f^{(2k+1)}(0) = 0 \qquad (k = 0,1,2,\cdots),$$

$$f^{(2k)}(0) = (2k-2)^2\cdot(2k-4)^2\cdot\cdots\cdot 2^2f''(0)$$
$$= 2^{2k-1}[(k-1)!]^2 \qquad (k = 1,2,\cdots).$$

【1223】 若 $f(x) = (x-a)^n\varphi(x)$,求 $f^{(n)}(a)$,其中函数 $\varphi(x)$ 在 a 点的邻域内有 $(n-1)$ 阶的连续导数.

解 由莱布尼兹公式有

$$f^{(n-1)}(x)$$
$$= (x-a)^n\varphi^{(n-1)}(x) + C_{n-1}^1n(x-a)^{(n-1)}\varphi^{(n-2)}(x) + \cdots$$
$$+ C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots3(x-a)^2\varphi'(x) + n!(x-a)\varphi(x),$$

于是 $$f^{(n-1)}(a) = 0,$$

根据定义有

$$f^{(n)}(a)$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$
$$= \lim_{x\to a}[(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x) + C_{n-1}^1n(x-a)^{n-2}\varphi^{(n-2)}(x) + \cdots$$
$$+ C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots3(x-a)\varphi'(x) + n!\varphi(x)]$$
$$= n!\varphi(a).$$

【1224】 证明:函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & 若\ x\neq 0,\\ 0, & 若\ x=0.\end{cases}$$

(n 为自然数)在点 $x=0$ 有直到 n(包括 n)阶的导数而没有($n+1$)阶导数.

证 由莱布尼兹公式,当 $x\neq 0$ 时,有

$$f^{(m)}(x)=\left(x^{2n}\sin\frac{1}{x}\right)^{(m)}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k(x^{2n})^{(m-k)}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(k)},$$

首先,我们用归纳法证明下面的等式

$$\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(k)}=\sum_{i=1}^{k-1}\left[a_ix^{-(k+i)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{i\pi}{2}\right)\right]$$

$$+(-x^{-2})^k\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)\quad(x\neq 0),$$

其中 a_i 是常数(仅依赖于 k 和 i).

因为 $\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

即当 $k=1$ 时,等式成立.

设当 $k=N$ 时,等式成立.则有

$$\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(N+1)}=\left[\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(N)}\right]'$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{N-1}a_ix^{-(N+i)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{i\pi}{2}\right)+(-x^2)^N\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{N\pi}{2}\right)\right]'$$

$$=\sum_{i=1}^{N-1}a_i\left[-(N+i)x^{-(N+1+i)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{i\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left.+x^{-(N+i)}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{(i+1)\pi}{2}\right)\right]$$

$$+\left[N(-x^{-2})^{N-1}\cdot(2x^{-3})\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{N\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left.+(-x^{-2})^{N+1}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{N+1}{2}\pi\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{(N+1)-1} b_i x^{-(N+1+i)} \sin\left(\frac{1}{x}+\frac{i\pi}{2}\right)$$

$$+(-x^{-2})^{N+1}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{N+1}{2}\pi\right).$$

其中 b_i 是仅依赖于 i 与 $N+1$ 的常数.

由归纳法知等式对一切自然数均成立. 因此，我们有

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot \frac{(2n)!}{(2n-m+k)!} x^{2n-m+k}$$

$$\cdot \left[\sum_{i=1}^{k-1} a_i x^{-(k+i)} \sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left.+(-x^{-2})^k \sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)\right] \qquad (x\neq 0),$$

于是 $$f^{(m)}(x) = (-1)^m x^{2(n-m)} \sin\left(\frac{1}{x}+\frac{m\pi}{2}\right)$$

$$+O(|x|^{2(n-m)+1})(x\to 0)$$

$$m=1,2,\cdots,n,$$

由于 $$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} x^{2n-1}\sin\frac{1}{x} = 0,$$

从而 $$f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[-x^{2n-3}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}\right)+O(|x|^{2(n-1)})\right] = 0.$$

依此类推可得

$$f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0,$$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(-1)^n}{x}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)+O(1)\right],$$

在 $x=0$ 的任一小邻域内

$$\frac{(-1)^n}{x}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right),$$

无界且振荡，故$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(-1)^n}{x}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\right)+O(1)\right]$不存在. 因此，$f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

【1225】 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & 若 x\neq 0,\\ 0, & 若 x=0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 处无穷次可微分. 作出此函数的图形.

证 首先，我们证明，对任何自然数 n，均有

$$f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_n\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\neq 0),$$

其中 $P_n(t)$ 是关于 t 的多项式，我们用数学归纳法证明. 因为

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

所以当 $n=1$ 时，命题成立.

设当 $n=k$ 时，命题成立，即

$$f^{(k)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right),$$

其中 $P_k(t)$ 是关于 t 的多项式. 而

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=\left[e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right]'\\&=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot P_k\left(\frac{1}{x}\right)+e^{-\frac{1}{x^2}}P'_k\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)\\&=e^{-\frac{1}{x^2}}\left\{2\left(\frac{1}{x}\right)^3P_k\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)^2P'_k\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\\&=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right),\end{aligned}$$

其中 $P_{k+1}(t)=2t^3P_k(t)-t^2P'_k(t)$ 是关于 t 的多项式. 即命题当 $n=k+1$ 时成立.

由归纳法知对任何自然数 n 均有

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad (x\neq 0),$$

而对任何自然数 n 均有

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}=0,$$

下面我们再用数学归纳法证明，对任何自然数 n 均有

$$f^{(n)}(0)=0.$$

事实上 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0,$

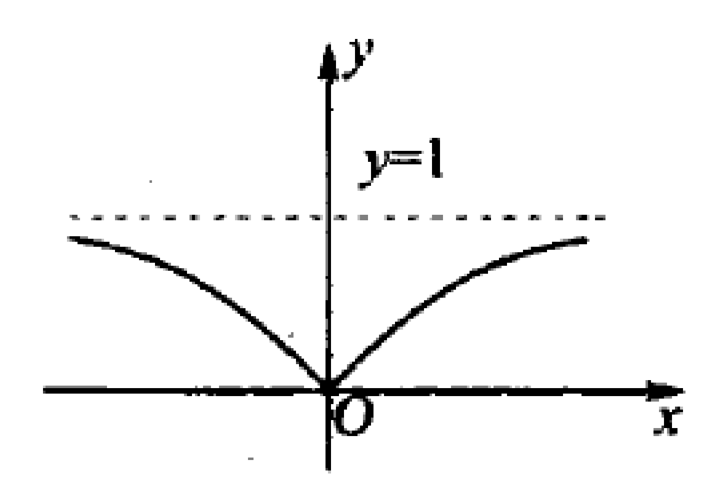
即当 $n=1$ 时，结论成立.

设 $f^{(k)}(0)=0$，即当 $n=k$ 时，结论成立. 则

$$f^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0.$$

因此，根据数学归纳法，知对任何自然数 n 都有 $f^{(n)}(0)=0$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 无穷多次可微且各阶导数均为 0，其图象如 1225 题图所示



1225 题图

【1226】 证明：切贝绍夫多项式

$$T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)\quad(n=1,2,\cdots),$$

满足方程 $(1-x^2)T''_m(x)-xT'_m(x)+m^2T_m(x)=0.$

证 $T'_m(x)=\dfrac{m}{2^{m-1}\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arccos x),$

$$T''_m(x)=-\frac{m^2}{2^{m-1}(1-x^2)}\cos(m\arccos x)$$

$$+\frac{mx}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(m\arccos x),$$

于是 $(1-x^2)T''_m(x)=-\frac{m^2}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)$

$$+\frac{mx}{2^{m-1}\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arccos x)$$

$$=-m^2T_m(x)+xT'_m(x),$$

即 $(1-x^2)T''_m(x)-xT'_m(x)+m^2T_m(x).$

【1227】 证明:勒让德多项式

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}[(x^2-1)^m]^{(m)}\quad(m=0,1,2,\cdots),$$

满足方程式

$$(1-x^2)P''_m(x)-2xP'_m(x)+m(m+1)P_m(x)=0.$$

提示:将等式 $(x^2-1)u'=2mxu$ 微分 $m+1$ 次,其中 $u=(x^2-1)^m$.

证 设 $u=(x^2-1)^m$,则

$$u'=2mx\cdot(x^2-1)^{m-1},$$

从而 $(x^2-1)u'=2mxu,$

将上面的等式微分 $m+1$ 次,并利用莱布尼兹公式有

$$(x^2-1)u^{(m+2)}+2(m+1)xu^{(m+1)}+m(m+1)u^{(m)}$$
$$=2mxu^{(m+1)}+2m(m+1)u^{(m)},$$

即 $(x^2-1)u^{(m+2)}+2xu^{(m+1)}-m(m+1)u^{(m)}=0.$

上式两边同乘以 $-\frac{1}{2^m m!}$,并注意到

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}u^{(m)},$$

就得到 $(1-x^2)P''_m(x)-2xP'_m(x)+m(m+1)P_m(x)=0.$

【1228】 切贝绍夫 — 拉盖尔多项式用下式确定:

$$L_m(x)=e^x(x^m e^{-x})^{(m)}\quad(m=0,1,2,\cdots),$$

求出多项式 $L_m(x)$ 的显式.

证明:$L_m(x)$ 满足方程式

$$xL''_m(x)+(1-x)L'_m(x)+mL(x)=0,$$

提示:利用等式 $xu'+(x-m)u=0$,其中 $u\doteq x^m e^{-x}$.

证 由莱布尼兹公式有

$$L_m(x) = e^x[(-1)^m x^m e^{-x} + (-1)^{m-1} C_m^1 m x^{m-1} e^{-x} + \cdots + (-1) \cdot C_m^{m-1} m(m-1)\cdots 2x e^{-x} + m! e^{-x}]$$
$$= (-1)^m [x^m - m^2 x^{m-1} + \cdots + (-1)^{m-1} m^2 (m-1)! x + (-1)^m m!].$$

下面证明 $L_m(x)$ 满足方程

$$xL''_m(x) + (1-x)L'_m(x) + mL_m(x) = 0,$$

设 $u = x^m e^{-x}$,

则 $$u' = mx^{m-1}e^{-x} - x^m e^{-x} = \frac{m}{x}u - u,$$

即 $$xu' + (x-m)u = 0.$$

在上式两边对 x 求 $(m+1)$ 阶导数，并利用莱布尼兹公式得

$$xu^{(m+2)} + (m+1)u^{(m+1)} + (x-m)u^{(m+1)} + (m+1)u^{(m)} = 0,$$

即 $$xu^{(m+2)} + (x+1)u^{(m+1)} + (m+1)u^{(m)} = 0.$$

再设 $y = u^{(m)}$，则由上式可得

$$xy'' + (x+1)y' + (m+1)y = 0,$$

而 $$L_m(x) = e^x \cdot y,$$

故 $$L'_m(x) = e^x(y' + y),$$
$$L''_m(x) = e^x(y'' + 2y' + y).$$

因此 $$xL''_m(x) + (1-x)L'_m(x) + mL_m(x)$$
$$= e^x\{x(y'' + 2y' + y) + (1-x)(y' + y) + my\}$$
$$= e^x\{xy'' + (x+1)y' + (m+1)y\}$$
$$= e^x \cdot 0 = 0.$$

【1229】 设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$，其中 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 都是可微分 n 次的函数. 证明:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{n} A_k(x) f^{(k)}(u),$$

其中系数 $A_k(x)(k = 0,1,\cdots n)$ 同函数 $f(u)$ 无关.

证 我们用数学归纳法证明命题，因为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\varphi'(x),$$

所以当 $n=1$ 时,命题成立.

设当 $n=m$ 时,命题成立.即

$$\frac{d^m y}{dx^m}=\sum_{k=1}^{m}A_k(x)f^{(k)}(u),$$

所以 $$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}=\left(\sum_{k=1}^{m}A_k(x)f^{(k)}(u)\right)'$$

$$=\sum_{k=1}^{m}[A'_k(x)f^{(k)}(u)+A_k(x)f^{(k+1)}(u)\varphi'(x)]$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}B_k(x)f^{(k)}(u),$$

其中 $$B_1(x)=A'_1(x),$$

$$B_k(x)=A'_k(x)+A_{k-1}(x)\varphi'(x)\qquad(k=2,\cdots,m),$$

$$B_{m+1}=A_m(x)\varphi'(x),$$

它们均与函数 $f(u)$ 无关.

因此,根据数学归纳法,对一切自然数 n,均有

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\sum_{k=1}^{m}A_k(x)f^{(k)}(u).$$

【1230】 证明:对于复合函数 $y=f(x^2)$ 的 n 阶导数,以下公式成立:

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(2x)^n f^{(n)}(x^2)+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(x^2)$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}f^{(n-2)}(x^2)+\cdots.$$

证 我们用数学归纳证明此命题,因为

$$\frac{dy}{dx}=2xf'(x^2).$$

所以,当 $n=1$ 时,命题成立.

设当 $n=m$ 时,命题成立.即

$$\frac{d^m y}{dx^m}=(2x)^m f^{(m)}(x^2)+\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}f^{(m-1)}(x^2)$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4}f^{(m-2)}(x^2)$$
$$+\cdots,$$

所以

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)$$
$$=(2x)^{m+1}f^{(m+1)}(x^2)+2m(2x)^{m-1}f^{(m)}(x^2)$$
$$+\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-1}f^{(m)}(x^2)$$
$$+\frac{m(m-1)}{1!}2(m-2)(2x)^{m-3}f^{(m-1)}(x^2)$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}2(m-4)(2x)^{m-5}f^{(m-2)}(x^2)$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-3}f^{(m-1)}(x^2)+\cdots$$
$$=(2x)^{m+1}f^{(m+1)}(x^2)+\left[2m+\frac{m(m-1)}{1!}\right](2x)^{m-1}f^{(m)}(x^2)$$
$$+\left[\frac{2m(m-1)(m-2)}{1!}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}\right](2x)^{m-3}f^{(m-1)}(x^2)$$
$$+\cdots$$
$$=(2x)^{m+1}f^{(m+1)}(x^2)+\frac{(m+1)m}{1!}(2x)^{m-1}f^{(m)}(x^2)$$
$$+\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{2!}(2x)^{m-3}f^{(m-1)}(x^2)+\cdots,$$

即当$n=m+1$时，命题也成立. 由数学归纳法知，命题对一切自然数 n 均成立.

【1231】 切贝绍夫—埃尔米特多项式用下式确定：

$$H_m(x)=(-1)^m e^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)} \qquad (m=0,1,2\cdots).$$

求出多项式 $H_m(x)$ 的显式.

证明：$H_m(x)$ 满足方程式

$$H''_m(x)-2xH'_m(x)+2mH_m(x)=0.$$

提示：利用等式 $u'+2xu=0$，其中 $u=e^{-x^2}$.

证 设 $u=e^{-x^2}$，则

$$u'=-2xe^{-x^2}=-2xu,$$

$$u''=\mathrm{e}^{-x^2}[(-2x)^2-2]=\mathrm{e}^{-x^2}[(-1)^2(2x)^2-2].$$

利用数学归纳法可证明

$$u^{(m)}=\Big[(-1)^m(2x)^m+(-1)^{m-1}\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}$$
$$+(-1)^{m-2}\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}\cdot(2x)^{m-4}+\cdots\Big]\mathrm{e}^{-x^2}.$$

所以 $\quad H_m(x)=(-1)^m\mathrm{e}^{x^2}\cdot u^{(m)}$
$$=(2x)^m-\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4}-\cdots.$$

又 $\quad u'+2xu=0.$

上式两边对 x 求 $(m+1)$ 阶导数,并利用莱布尼兹公式,得

$$u^{(m+2)}+2xu^{(m+1)}+2(m+1)u^{(m)}=0.$$

令 $y=u^{(m)}$,则有

$$y''+2xy'+2(m+1)y=0.$$

而 $\quad H_m(x)=(-1)^m\mathrm{e}^{x^2}y.$

所以 $\quad H'_m(x)=(-1)^m\mathrm{e}^{x^2}(y'+2xy);$

$$H''_m(x)=(-1)^m\mathrm{e}^{x^2}[y''+4xy'+(4x^2+2)y].$$

因此 $\quad H''_m(x)-2xH'_m(x)+2mH_m(x)$
$$=(-1)^m\mathrm{e}^{x^2}\{y''+4xy'+(4x^2+2)y$$
$$-2x(y'+2xy)+2my\}$$
$$=(-1)^m\mathrm{e}^{x^2}[y''+2xy'+2(m+1)y]=0.$$

【1232】 证明等式 $(x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$

提示:运用数学归纳法.

证 因为 $(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})'=-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$

所以当 $n=1$ 时,等式成立.

设当 $n=k$ 时,等式成立.则有

$$(x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^{(k+1)}$$

$$= [(x \cdot x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}]'$$

$$= [x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} + k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}]'$$

$$= \left[x \cdot \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} + k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}\right]'$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}} + k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^k k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}.$$

因此，根据数学归纳法，对一切自然数 n 有

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

【1232.1】 求证公式

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n\ln x) = n!\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \qquad (x > 0).$$

证 我们用数学归纳法证明等式. 因为

$$\frac{d}{dx}(x\ln x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \qquad (x > 0),$$

即当 $n = 1$ 时，等式成立.

现设 $n = k$ 时等式成立，即

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^k\ln x) = k!\left(\ln x + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right) \qquad (x > 0).$$

下面证明当 $n = k + 1$ 时等式成立.

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^{k+1}\ln x)$$

$$= \{[x \cdot (x^k\ln x)]^{(k)}\}'$$

$$= [x(x^k\ln x)^{(k)} + k(x^k\ln x)^{(k-1)}]'$$

$$= \left[k!x\left(\ln x + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\right]' + k(x^k\ln x)^{(k)}$$

$$= k!\left(\ln x + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right) + k!x \cdot \frac{1}{x} + k \cdot k!\left(\ln x + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)$$

$$= (k+1)!\left(\ln x + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}\right) + k!$$

$$= (k+1)!\left(\ln x + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i}\right).$$

根据数学归纳法,对任何正整数 n 都有

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n \ln x) = n!\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \qquad (x > 0).$$

【1232.2】 证明公式:

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}[C_n(x)\sin x - S_n(x)\cos x],$$

其中 $$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

证 因为

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right)'$$

$$= \frac{-x\sin x \cdot x^2 - 2x(x\cos x - \sin x)}{x^4}$$

$$= \frac{(2 - x^2)\sin x - 2x\cos x}{x^3}$$

$$= \frac{(2 \cdot 1)!}{x^3}\left[\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right)\sin x - x \cdot \cos x\right].$$

现假设对于整数 n,公式成立,即

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}[C_n(x)\sin x - S_n(x)\cos x],$$

其中 $$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

下面我们证明对整数$(n+1)$,公式也成立. 注意到

$$C'_n(x)+S_n(x)=0,$$

$$C_n(x)-S'_n(x)=(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$S'_{n+1}(x)-C_n(x)=0,$$

$$S_{n+1}(x)+C_n(x)=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

我们有 $\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

$$=\left\{\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}[C_n(x)\sin x-S_n(x)\cos x]\right\}'$$

$$=(2n)!\left\{\frac{C'_n(x)\sin x+C_n(x)\cos x-S'_n(x)\cos x+S_n(x)\sin x}{x^{2n+1}}\right.$$

$$\left.-\frac{(2n+1)[C_n(x)\sin x-S_n(x)\cos x]}{x^{2n+2}}\right\}$$

$$=(2n+1)!\frac{S_{n+1}(x)\cos x-C_n(x)\sin x}{x^{2n+2}},\ \frac{d^{2(n+1)}}{dx^{2(n+1)}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\left\{(2n+1)!\frac{S_{n+1}(x)\cos x-C_n(x)\sin x}{x^{2n+2}}\right\}'$$

$$=(2n+1)!\left\{\frac{S'_{n+1}(x)\cos x-S_{n+1}\sin x-C'_n(x)\sin x-C_n(x)\cos x}{x^{2n+2}}\right.$$

$$\left.+\frac{2(n+1)[S_{n+1}(x)\cos x-C_n(x)\sin x]}{x^{2n+3}}\right\}$$

$$=\frac{[2(n+1)]!}{x^{2n+3}}[C_{n+1}(x)\sin x-S_{n+1}(x)\cos x].$$

即对整数 $(n+1)$，公式成立.

因此，根据数学归纳法，对任何自然数 n，都有

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}[C_n(x)\sin x-S_n(x)\cos x].$$

【1233】 设 $\frac{d}{dx}=D$ 表示微分算子且

$$f(D)=\sum_{k=0}^{n}P_k(x)D^k,$$

为微分符号多项式，其中 $P_k(x)(k=0,1,\cdots n)$ 是关于 x 的连续

函数.

证明：$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x)$

其中 λ 为常数.

证 根据莱布尼兹公式有

$$\begin{aligned}D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}&=\{e^{\lambda x}u(x)\}^{(k)}\\&=\sum_{i=0}^{k}C_k^i(e^{\lambda x})^{(i)}u^{(k-i)}(x)\\&=e^{\lambda x}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i u^{(k-i)}(x),\end{aligned}$$

而另一方面

$$\begin{aligned}(D+\lambda)^k(u(x))&=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i D^{(k-i)}u(x)\\&=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i u^{(k-i)}(x).\end{aligned}$$

所以 $$D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}(D+\lambda)^k\{u(x)\},$$

因此 $$\begin{aligned}f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\}&=\sum_{k=0}^{n}P_k(x)D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}\\&=\sum_{k=0}^{n}P_k(x)\cdot e^{\lambda x}(D+\lambda)^k u(x)\\&=e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n}P_k(x)(D+\lambda)^k u(x)\\&=e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),\end{aligned}$$

即 $$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x).$$

【1234】 证明：如果在方程 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^ky_x^{(k)}=0$ 中，设 $x=e^t$，其中 t 为自变数，则这个方程具有以下形式

$$\sum_{k=0}^{n}a_kD(D-1)\cdots(D-k+1)y=0,$$

其中 $D=\dfrac{d}{dt}$.

证 因为 $x=e^t$，所以，我们有

$$Dy=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-t}Dy.$$

而
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\mathrm{e}^{-t}D\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\mathrm{e}^{-t}D[\mathrm{e}^{-t}Dy]$$
$$=\mathrm{e}^{-t}[-\mathrm{e}^{-t}Dy+\mathrm{e}^{-t}D^2y]=\mathrm{e}^{-2t}D(D-1)y.$$

用数学归纳法可证得

$$\frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}x^k}=\mathrm{e}^{-kt}D(D-1)\cdots(D-k+1)y. \qquad ①$$

事实上，设公式 ① 对 $k=m$ 成立，则有

$$\frac{\mathrm{d}^{m+1}y}{\mathrm{d}x^{m+1}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^my}{\mathrm{d}x^m}\right)$$
$$=\mathrm{e}^{-t}D[\mathrm{e}^{-mt}D(D-1)\cdots(D-m+1)y]$$
$$=\mathrm{e}^{-t}[-m\mathrm{e}^{-mt}D(D-1)\cdots(D-m+1)y$$
$$+\mathrm{e}^{-mt}D^2(D-1)\cdots(D-m+1)y]$$
$$=\mathrm{e}^{-(m+1)t}D(D-1)\cdots(D-m+1)(D-m)y,$$

即公式 ① 对 $k=m+1$ 也成立．因此，公式 ① 对一切自然数都成立．所以，有

$$x^k\frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}x^k}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y,$$

因此，原方程变为

$$\sum_{k=0}^{n}a_kD(D-1)\cdots D(-k+1)y=0.$$

§6. 罗尔、拉格朗日和柯西定理

1. 罗尔定理　如果：

(1) 函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$内有定义且是连续的；

(2) $f(x)$ 在此区间内有有限的导数 $f'(x)$；

(3) $f(a)=f(b)$，则至少在区间(a,b)内存在一个数 c，使 $f'(c)=0$.

2. 拉格朗日定理　如果：

(1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内有定义并且是连续的；

(2) $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有有限的导数，则

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c),\text{其中 } a<c<b.$$

(有限增量公式)

3. 柯西定理 如果：

(1) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内有定义并且是连续的；

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在开区间 (a,b) 内有有限的导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$；

(3) 当 $a<x<b$ 时，$f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0$；

(4) $g(a)\neq g(b)$，则

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\text{式中 } a<c<b.$$

【1235】 检验罗尔定理对函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ 的正确性.

解 (1) 函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 及 $[2,3]$ 上连续.

(2) $f'(x)$ 在 $(1,2)$ 及 $(2,3)$ 内存在.

(3) $f(1)=f(2)=0,f(2)=f(3)=0$.

即函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 及 $[2,3]$ 上满足罗尔定理的条件. 故由罗尔定理，应该存在 $c_1\in(1,2)$ 及 $c_2\in(2,3)$，使得 $f'(c_1)=0,f'(c_2)=0$. 事实上

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)\\&\quad+(x-1)(x-2)\\&=3x^2-12x+11,\end{aligned}$$

令 $f'(x)=0$ 解之得 $x=2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故取 $c_1=2-\frac{\sqrt{3}}{3},c_2=2+\frac{\sqrt{3}}{3}$，

显然 $1<c_1<2,2<c_2<3$，

且 $f'(c_1)=0,f'(c_2)=0$.

这验证了罗尔定理.

【1236】 当 $x_1=-1$ 和 $x_2=1$ 时，函数 $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ 为

零，然而当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f'(x)\neq 0$，解释这同罗尔定理表面上的矛盾.

解 因为 $f'(x)$ 在 $x=0$ 不存在，即在 $[-1,1]$ 上，$f(x)$ 不满足罗尔定理的第二个条件，故罗尔定理结论在 $[-1,1]$ 上可以不成立.

【1237】 设函数 $f(x)$ 在有穷或无穷区间 (a,b) 内的每一点上具有有限导数 $f'(x)$，且 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$.

证明：$f'(c)=0$，其中 c 为区间 (a,b) 内的某个点.

证 当 (a,b) 为有穷区间时，设

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b),\\ A, & x=a\text{ 或 }x=b,\end{cases}$$

其中 $$A=\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to b-0}f(x).$$

显然，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)$. 故由罗尔定理知，在 (a,b) 内至少存在一点 c，使

$$F'(c)=0,$$

而在 (a,b) 内有 $F'(x)=f'(x)$，

故 $$f'(c)=0.$$

下面讨论 (a,b) 为无穷区间的情况.

若 $a=-\infty, b=+\infty$，则设

$$x=\tan t\quad\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right),$$

则 $$g(t)=f(\tan t),$$

在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内连续，可导，且

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}g(t)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}g(t)=\lim_{x\to+\infty}f(x),$$

故由前面的讨论知，至少存在一点 $t_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

使 $$g'(t_0)=0,$$

而 $$g'(t_0)=f'(c)\cdot\sec^2 t_0,$$

其中 $$c=\tan t_0.$$

由于 $\sec^2 t_0 \neq 0.$

故 $f'(c) = 0.$

若 a 为有限数，$b=+\infty$，即区间为 $(a,+\infty)$，取 $b_0 > \max\{a,0\}$，则映射

$$x = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t},$$

将区间 (a,b_0) 映为区间 $(a,+\infty)$. 复合函数

$$g(t) = f\left(\frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}\right),$$

在区间 (a,b_0) 内满足罗尔定理的条件. 故存在 $t_0 \in (a,b_0)$ 使得 $g'(t_0) = 0$,

而 $$g'(t_0) = f'(c) \cdot \frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2},$$

其中 $$c = \frac{(b_0 - a)t_0}{b_0 - t_0}.$$

显然 $a < c < +\infty$,

由于 $$\frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} \neq 0,$$

故 $f'(c) = 0.$

对于 $a = -\infty$，b 为有限数的情形可类似地讨论.

【1238】 设函数 $f(x)$,

(1) 在闭区间 $[x_0,x_n]$ 内有定义且有 $(n-1)$ 阶的连续导数 $f^{(n-1)}(x)$;

(2) 在区间 (x_0,x_n) 内有 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$;

(3) 以下等式成立:

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) \qquad (x_0 < x_1 \cdots < x_n),$$

证明：在区间 (x_0,x_n) 内，最少有一个点 ξ，以致 $f^{(n)}(\xi) = 0$.

证 在闭区间 $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 上，函数满足罗尔定理的条件，因此存在

$$x'_k \in (x_{k-1},x_k) \qquad (k = 1,2,\cdots,n),$$

使得 $f'(x'_k) = 0 \qquad (k = 1,2,\cdots,n).$

所以在区间 $[x'_k,x'_{k+1}]$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$ 上，函数 $f'(x)$ 满足罗

尔定理的条件. 因此,存在

$$x_k^2 \in (x'_k, x'_{k+1}) \qquad (k = 1,2,\cdots,n-1),$$

使得 $$f''(x_k^2) = 0 \qquad (k = 1,2,\cdots,n-1),$$

继续上述步骤,经过$(n-1)$次后,得一个区间

$$[x_1^{n-1}, x_2^{n-1}] \subset (x_0, x_n),$$

满足 $$f^{(n-1)}(x_1^{n-1}) = f^{(n-1)}(x_2^{n-1}) = 0,$$

于是在$[x_1^{n-1}, x_2^{n-1}]$上$f^{(n-1)}(x)$满足罗尔定理的条件,所以,至少存在一点

$$\xi \in (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}) \subset (x_0, x_n),$$

使得 $$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

【1239】 设函数$f(x)$:

(1) 在闭区间$[a,b]$内有定义和有$(p+q)$阶的连续导数$f^{(p+q)}(x)$;

(2) 在区间(a,b)内有$(p+q+1)$阶的导数$f^{(p+q+1)}(x)$;

(3) 以下等式成立:

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0,$$

和 $$f(b) = '(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0,$$

证明:$f^{(p+q+1)}(c) = 0$,其中c为区间(a,b)内的某一点.

证 我们讨论三种情况.

(1) $p = q$.

在$[a,b]$上$f(x)$满足罗尔定理的条件. 因此,至少存在一点$x_1^{(1)} \in (a,b)$,使得

$$f'(x_1^{(1)}) = 0,$$

再根据条件知,$f'(x)$在区间$[a,x_1^{(1)}]$及$[x_1^{(1)},b]$上均满足罗尔定理的条件,所以,至少存在

$$x_1^{(2)} \in [a, x_1^{(1)}],$$

及 $$x_2^{(2)} \in [x_1^{(1)}, b],$$

使得 $$f''(x_1^{(2)}) = f''(x_2^{(2)}) = 0.$$

继续上述步骤,经过p次后,得到$p+2$个点

$$a, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \cdots, x_p^{(p)}, b,$$

使得 $f^{(p)}(a)=f^{(p)}(x_1^{(p)})=\cdots=f^{(p)}(x_p^{(p)})$
$$=f^{(p)}(b)=0.$$
对 $F(x)=f^{(p)}(x)$ 应用 1238 题的结果知,存在
$$c\in(a,b),$$
使得 $F^{(p+1)}(c)=0$,
即 $f^{(2p+1)}(c)=0$.

(2) $q>p$.

设 $q=p+k$(k 为某正整数)

对 $f(x)$ 重复运用($p+1$)次罗尔定理,知在(a,b)内存在($p+1$)个点
$$y_1,y_2,\cdots,y_{p+1},$$
满足 $f^{(p+1)}(y_k)=0\qquad(k=1,2,\cdots,p+1)$,
再注意 $f^{(p+1)}(b)=\cdots=f^{(p+k)}(b)=0$.
对 $f^{(p+1)}(x)$ 重复应用 k 次罗尔定理,得在(a,b)内存在($p+1$)个点
$$z_1,z_2,\cdots,z_{p+1},$$
使得 $f^{(p+k+1)}(z_k)=0\qquad(k=1,2,\cdots,p+1)$.
再将 1238 题的结果应用到 $F(x)=f^{(p+k+1)}(x)$ 知存在
$$c\in(z_1,z_{p+1})\subset(a,b),$$
使得 $F^{(p)}(c)=0$,
即 $f^{(p+q+1)}(c)=0$.

(3) $p>q$ 时,类似地讨论可得结论.

【1240】 求证:如果带有实系数 $a_k(k=0,1\cdots n)$ 的多项式
$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\qquad(a_0\neq0)$$
的所有根为实数,则它的逐次导数 $P'_n(x),P''_n(x),\cdots,P_n^{(n-1)}(x)$ 也只有实根.

证 设 $P_n(x)$ 的根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$,其中 α_i 的重数为 $n_i(i=1,2,\cdots,k)$. 则根据题设有 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,k)$ 均为实数,并且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$,于是,我们有
$$P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_{n_k})^{n_k},$$
显然,α_i 为 $P'_n(x)$ 的 n_i-1 重根($i=1,2,\cdots,k$). 由于

$$P_n(\alpha_1)=P_n(\alpha_2)=\cdots=P_n(\alpha_k)=0,$$

$P_n(x)$ 可微，由罗尔定理，存在

$$\eta_i\in(\alpha_i,\alpha_{i+1}),$$

使得 $\qquad P'_n(\eta_i)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,k-1),$

即 $\eta_1,\cdots,\eta_{k-1}$ 为 $P'_n(x)$ 的根. 又

$$(k-1)+\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)=\sum_{i=1}^{k}n_i-1=n-1.$$

注意到 $P'_n(x)$ 是 $(n-1)$ 次多项式，因而它只有 $(n-1)$ 个根. 因此 $P'_n(x)$ 的所有根为

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\eta_1,\cdots,\eta_{k-1},$$

它们均为实数. 这样我们证明了一个 n 次实系数多项式，如果它的 n 个根均为实数，则它的导函数的 $n-1$ 个根也必全为实根. 将这样的结果应用到 $P'_n(x)$ 上，可得 $P''_n(x)$ 的根全为实根. 依此类推，便可得到 $P'_n(x),P''_n(x),\cdots,P_n^{(n-1)}(x)$ 都只有实根.

【1241】 证明：勒让德多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{(x^2-1)^n\},$$

所有根都是实数且包含在区间 $(-1,1)$ 内.

证 设 $Q_{2n}(x)=(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$

$Q_{2n}(x)$ 为 $2n$ 次多项式，且仅有实根，其中 $x=-1$ 为 n 重根，$x=1$ 也为 n 重根. 因此，根据 1240 题的结果知

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}Q_{2n}(x),$$

也仅有实根，且都位于 $[-1,1]$ 上. 因为 -1 为 $Q_{2n}(x)$ 的 n 重根，故 -1 不是 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}Q_{2n}(x)$ 的根，因而也不是 $P_n(x)$ 的根. 同理 1 也不是 $P_n(x)$ 的根，因此，$P_n(x)$ 的根全部位于 $(-1,1)$ 中.

【1242】 证明：切贝绍夫—拉盖尔多项式

$$L_n(x)=\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x}),$$

所有根都是正数.

证 设 $Q(x)=x^n\mathrm{e}^{-x}$,

则由莱布尼兹公式得

$$Q^{(m)}(x)=e^{-x}[(-1)^m x^n+(-1)^{m-1}C_m^1 nx^{n-1}+\cdots$$
$$+(-1)C_m^{m-1}n(n-1)\cdots(n-m+2)x^{n-m+1}$$
$$+n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m}]$$
$$(m=1,2,\cdots,n).$$

显然 $Q^{(m)}(0)=0 \quad (m=0,2,\cdots,n-1)$,

其中 $Q^{(0)}(x)=Q(x)$,

但 $Q^{(n)}(0)=n!\neq 0.$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}Q^{(m)}(x)=0 \quad (m=0,1,2,\cdots,n).$

对函数 $Q(x)$ 和区间 $(0,+\infty)$ 应用 1237 题的结论,得存在

$$x^{(1)}\in(0,+\infty),$$

使 $Q'(x^{(1)})=0.$

再对函数 $Q'(x)$ 和区间 $(0,x^{(1)})$ 及 $(x^{(1)}+\infty)$ 应用 1237 题的结论,知存在

$$x_1^{(2)}\in(0,x^{(1)}),x_2^{(2)}\in(x^{(1)},+\infty).$$

使 $Q''(x_1^{(2)})=Q''(x_2^{(2)})=0.$

这样继续下去,反复应用 1237 题 n 次得在区间 $(0,+\infty)$ 内存在 n 个点 $x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_n^{(n)}$,使得

$$Q^{(n)}(x_i^{(n)})=0 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

所以 $L_n(x_i^{(n)})=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$,

即 $x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_n^{(n)}$ 都是 $L_n(x)$ 的根. 而

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}Q(x)$$
$$=(-1)^n x^n+(-1)^{n-1}C_n^1 nx^{n-1}+\cdots+n!,$$

是 n 次多项式. 故 $L_n(x)$ 恰有 n 个根,因此 $x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_n^{(n)}$ 是 $L_n(x)$ 的全部根,它们位于 $(0,+\infty)$ 内.

【1243】 证明:切贝绍夫—埃尔米特多项式

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}),$$

所有的根为实数.

证 设 $Q(x)=e^{-x^2}$. 我们用归纳法证明 $Q^{(n)}(x)$ 有 n 个相异

的实根.

$$易求 Q'(x) = -2xe^{-x^2},$$

显然 $Q'(x)$ 有一个实根 $x=0$.

设 $Q^{(k)}(x)=0$ 有 k 个相异实根

$$x_1^{(k)} < x_2^{(k)} < \cdots < x_k^{(k)},$$

$Q^{(k)}(x)$ 是 e^{-x^2} 与一个 k 次多项式的乘积,所以

$$Q^{(k)}(x) = Ae^{-x^2}(x-x_1^{(k)})(x-_2^{(k)})\cdots(x-x_k^{(k)}),$$

其中 $A\neq 0$ 是一个常数. 下面我们证明 $Q^{(k+1)}(x)=0$ 有 $(k+1)$ 个相异实根. 事实上,因为

$$Q^{(k)}(x_i^{(k)}) = Q^{(k)}(x_{i+1}^{(k)}) \qquad (i=1,2,\cdots,n-1),$$

由罗尔定理,知存在

$$x_{i+1}^{(k+1)} \in (x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}),$$

使 $\quad Q^{(k+1)}(x_{i+1}^{(k+1)}) = 0 \qquad (i=1,\cdots,n-1),$

又因为 $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} Q^{(k)}(x) = 0,$

及 $\quad Q^{(k)}(x_1^{(k)}) = 0.$

由 1237 题的结果,知存在

$$x_1^{(k+1)} \in (-\infty, x_1^{(k)}),$$

使得 $\quad Q^{(k+1)}(x_1^{(k+1)}) = 0.$

同理,存在

$$x_{k+1}^{(k+1)} \in (x_k^{(k)}, +\infty),$$

使得 $\quad Q^{(k+1)}(x_{k+1}^{(k+1)}) = 0,$

即 $Q^{(k+1)}(x)=0$ 有 $(k+1)$ 个实根. 故由数学归纳法,知对任何正整数 $nQ^{(n)}(x)=0$,有 n 个相异实根. 从而 $H_n(x)$ 有 n 个相异实根. 而 $H_n(x)$ 为 n 次多项式. 因此,$H_n(x)$ 的根全为实根.

【1244】 在曲线 $y=x^3$ 上某点的切线平行于连接点 $A(-1,-1)$ 和点 $B(2,8)$ 的弦,求出这个点.

解 设所求点为 (x_0,y_0),由题意有

$$y'(x_0) = 3x_0^2 = \frac{8-(-1)}{2-(-1)} = 3,$$

解之得 $\quad x_0 = -1,$

或 $\qquad x_0 = 1.$

故所求点为$(-1,-1)$及$(1,1)$.

【1245】 如果 $ab<0$,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的有限增量公式在闭区间$[a,b]$内是正确的吗?

解 不正确.事实上,如果有限增量公式在此区间成立,则有

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad c\in(a,b),$$

即
$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=-\frac{1}{c^2}(b-a),$$

即
$$\frac{a-b}{ab}=\frac{1}{c^2}(a-b).$$

所以 $c^2=ab<0$ 矛盾.

因此,有限增量公式对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$[a,b]$($ab<0$)上不正确,原因是 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不存在,故有限增量公式的条件不满足.

【1246】 如果:

(1) $f(x)=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$;

(2) $f(x)=x^3$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$;

(4) $f(x)=e^x$.

求函数 $\theta=\theta(x,\Delta x)$,使得

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x f'(x+\theta\Delta x) \qquad (0<\theta<1).$$

解 (1) $f'(x)=2ax+b$.

于是,有
$$a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-(ax^2+bx+c)=\Delta x[2a(x+\theta\Delta x)+b],$$

即
$$2ax\Delta x+a\Delta x^2+b\Delta x=2ax\Delta x+\theta\cdot 2a\Delta x^2+b\Delta x,$$

化简之得 $\theta=\dfrac{1}{2}$.

(2) $f'(x)=3x^2$. 于是有

$$(x+\Delta x)^3 - x^3 = \Delta x \cdot 3(x+\theta\Delta x)^2.$$

如果 $x=0$,则 $\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

如 $x\neq 0$,则有 $3\theta^2\Delta x+6\theta x-(3x+\Delta x)=0$.

所以 $$\theta=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+x\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x)^2}}{\Delta x},$$

其中正负号的取法由 $x,\Delta x$ 的符号及条件 $0<\theta<1$ 决定.

(3) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$. 于是有

$$\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{(x+\theta\Delta x)^2},$$

即 $$\theta^2\Delta x^2+2x\theta\cdot\Delta x-x\Delta x=0,$$

或 $$\theta^2+\frac{2x}{\Delta x}\cdot\theta-\frac{x}{\Delta x}=0.$$

所以 $$\theta=-\frac{x}{\Delta x}\pm\sqrt{\frac{x^2}{\Delta x^2}+\frac{x}{\Delta x}},$$

其中正负号根据条件 $0<\theta<1$ 来确定.

(4) $f'(x)=e^x$. 于是有

$$e^{x+\Delta x}-e^x=\Delta x e^{x+\theta\Delta x}.$$

所以 $$\theta=\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

【1246.1】 设

$$f(x)\in C^{(1)}(-\infty,+\infty),$$

且对于任何 x 和 h,有恒等式

$$f(x+h)-f(x)\equiv hf'(x).$$

证明:$f(x)=ax+b$,其中 a,b 为常数.

证 因为对任何 x 和 h 都有

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x),$$

特别地取 $x=0$,则对任何 h 都有

$$f(h)-f(0)=hf'(0).$$

因此 $$f(x)=ax+b.$$

其中 $\quad a=f'(0),b=f(0).$

【1246.2】 设

$$f(x)\in C^{(2)}(-\infty,+\infty).$$

且对于任何 x 和 h,有恒等式 $f(x+h)-f(x)\equiv hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)$.

证明:$f(x)=ax^2+bx+c$,其中 a,b 和 c 为常数.

证 因为对于任意的 x 和 h 都有

$$f(x+h)-f(x)=hf'\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

在上式中将 x 看成常数,对 h 求导数得

$$f'(x+h)=f'\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{h}{2}f''\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

即 $$f'(x+h)-f'\left(x+\frac{h}{2}\right)=\frac{h}{2}f''\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

特别地,取 $x+\frac{h}{2}=0$ 得

$$f'\left(\frac{h}{2}\right)-f'(0)=\frac{h}{2}f''(0),$$

由 h 的任意性,得

$$f'(x)=2ax+b,$$

其中 $\quad f''(0)=2a,f'(0)=b.$

令 $\quad F(x)=f(x)-ax^2-bx,$

则 $\quad F'(x)=f'(x)-2ax-b=0.$

因此 $\quad F(x)\equiv c=f(0),$

故 $\quad f(x)=ax^2+bx+c.$

其中 a,b,c 为常数.

【1247】 证明:如果 $x\geqslant 0$,则

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中$\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{1}{2}$,并且$\lim\limits_{x\to+0}\theta(x)=\frac{1}{4}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

证 当 $x\geqslant 0$ 时,对函数$\sqrt{x}$ 应用有限增量公式,得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

解之得　$\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)}-x)$,

当 $x=0$ 时，$\theta=\frac{1}{4}$.

当 $x>0$ 时，有

$$0\leqslant\sqrt{x(x+1)}-x=\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}<\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

所以　$\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$,

并且　$\lim\limits_{x\to+0}\theta(x)=\lim\limits_{x\to+0}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)}-x)\right]=\frac{1}{4}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)}-x)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{x}{2(\sqrt{x(x+1)}+x)}\right]=\frac{1}{2}.$$

【1248】 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3-x^2}{2}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{x}, & \text{当 } 1<x<\infty.\end{cases}$$

在闭区间[0,2]上确定函数 $f(x)$ 有限增量公式的中间值 c.

解　$$f'(x)=\begin{cases}-x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\frac{1}{x^2}, & \text{当 } 1<x<+\infty,\end{cases}$$

且　　$f'_-(0)=f'_+(0)=-1$,

所以，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微，在[0,2]上连续且

$$f(0)=\frac{3}{2},f(2)=\frac{1}{2}.$$

据增量公式有

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-c(2-0),$$

或 $\quad \frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{c^2}(2-0).$

所以 $\quad c=\frac{1}{2},$

或 $\quad c=\sqrt{2} \quad (c=-\sqrt{2}$ 不合适,舍去).

这就是所求的中间值.

【1249】 设 $f(x)-f(0)=xf'[\xi(x)]$,

其中 $\quad 0<\xi(x)<x.$

证明:如果当 $x>0$ 时,$f(x)=x\sin(\ln x)$,$f(0)=0$,则函数 $\xi=\xi(x)$ 在无论怎么小的区间 $(0,\varepsilon)$(这里 $\varepsilon>0$) 内也是不连续的.

证 假设 $\xi(x)$ 在某区间 $(0,\varepsilon)$ 内连续($\varepsilon>0$).

因为当 $x>0$ 时,

$$f'(x)=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln x\right).$$

故由 $\quad f(x)-f(0)=xf'(\xi(x)),$

得 $\quad x\sin(\ln x)=x\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\xi(x)\right).$

从而 $\quad \sin(\ln x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\xi(x)\right) \quad (0<x<+\infty),$

现取一个充分大的自然数 N,使

$$-2N\pi+\frac{\pi}{4}<\ln\xi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

由 $0<\xi(x)<x$ 知 $\lim\limits_{x\to+0}\xi(x)=0.$

从而 $\quad \lim\limits_{x\to+0}\ln\xi(x)=-\infty,$

因此,可取 $0<\delta<\frac{\varepsilon}{2}$,使 $\ln\xi(\delta)<-2N\pi+\frac{\pi}{4}.$

由于 $\ln\xi(x)$ 在 $\left[\delta,\frac{\varepsilon}{2}\right]$ 上连续,据连续函数的介值定理知,存在 $x_0\in\left(\delta,\frac{\varepsilon}{2}\right)$,使

$$\ln\xi(x_0)=-2N\pi+\frac{\pi}{4},$$

于是　　$1 \geqslant \sin(\ln x_0) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln\xi(x_0)\right) = \sqrt{2}.$

矛盾.因此 $\xi(x)$ 在任意小的区间 $(0,\varepsilon)$ 内不连续.

【1250】 假设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有连续导数 $f'(x)$，对于区间 (a,b) 内的任何一点 ξ，能否从此区间指出另外的两点 x_1 和 x_2，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \qquad (x_1 < \xi < x_2).$$

研究：$f(x) = x^3 (-1 \leqslant x \leqslant 1)$，其中 $\xi = 0$.

解　不可以.例如：设

$$f(x) = x^3 \qquad (-1 < x < 1).$$

对于 $\xi = 0$，就找不到所需的 x_1 和 x_2，使

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(0) = 0 \qquad (x_1 < 0 < x_2).$$

事实上，$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2$$
$$= x_2^2 + x_1^2 - |x_1|\cdot|x_2|$$
$$> x_2^2 + x_1^2 - 2|x_1|\cdot|x_2|$$
$$= (|x_2| - |x_1|)^2 \geqslant 0.$$

【1251】 证明下列不等式：

(1) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$；

(2) $py^{p-1}(x-y) \leqslant x^p - y^p \leqslant px^{p-1}(x-y)$，若 $0 < y < x$ 且 $p > 1$；

(3) $|\arctan a - \arctan b| \leqslant |a - b|$；

(4) $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$，若 $0 < b < a$.

证　(1) 根据拉格朗日定理，有

$$|\sin x - \sin y| = |(x-y)\cos\xi| \leqslant |x-y|,$$

其中，ξ 位于 x,y 之间.

(2) $x^p - y^p = p\xi^{p-1}(x-y)$，

其中 $0 < y < \xi < x$.由于 $p > 1$，所以

$$y^{p-1} < \xi^{p-1} < x^{p-1}.$$

因此 $py^{p-1}(x-y)<x^p-y^p<px^{p-1}(x-y)$.

(3) $|\arctan a-\arctan b|=\left|\dfrac{1}{1+\xi^2}(a-b)\right|$

$\leqslant|a-b|$,

其中,ξ 位于 a,b 之间.

(4) $\ln a-\ln b=\dfrac{a-b}{\xi}$

其中 $0<b<\xi<a$,于是

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

【1252】 解释在闭区间$[-1,1]$上,为什么柯西定理对于函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=x^3$ 是不正确的?

解 因为当 $x=0$ 时,

$$[f'(0)]^2+[g'(0)]^2=0,$$

所以 $f(x),g(x)$ 在$[-1,1]$上不满足柯西定理的条件.因此,柯西定理的结论可以不成立.事实上

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=0,$$

而 $$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{2\xi}{3\xi^2}\neq 0 \qquad \xi\in(-1,1),\xi\neq 0$$

它们是不相等的.

【1253】 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[x_1,x_2]$上可微分,而且 $x_1x_2>0$,证明:

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

其中 $x_1<\xi<x_2$.

证 设 $g(x)=\dfrac{1}{x}$,$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

由于 $x_1x_2>0$,故 $0\notin[x_1,x_2]$,从而 $g(x),F(x)$ 均在$[x_1,x_2]$上可微,且

$$[g'(x)]^2+[F'(x)]^2=\frac{1+[xf'(x)-f(x)]^2}{x^4}\neq 0,$$

$$g(x_1) \neq g(x_2).$$

因此,$F(x)$ 和 $g(x)$ 在$[x_1,x_2]$上满足柯西定理的条件,故至少存在一点 $\xi \in (x_1,x_2)$,使得

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即
$$\frac{\dfrac{f(x_2)}{x_2}-\dfrac{f(x_1)}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}} = \frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}.$$

整理得
$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

【1254】 证明:如果函数 $f(x)$ 在有穷区间(a,b) 内可微分,但无界,则其导数 $f'(x)$ 在区间(a,b) 内也无界,逆定理是不正确的(举例说明).

证　假设 $f'(x)$ 在(a,b) 内有界,即存在 $M>0$,使得

$$|f'(x)|<M \qquad x \in (a,b).$$

取定 $c \in (a,b)$. 由有限增量公式知对任何 $x \in (a,b)$ 有

$$|f(x)-f(c)| = |x-c||f'(\xi)| < M(b-a),$$

其中,ξ 位于 x 与 c 之间.

因此
$$|f(x)| \leqslant |f(c)|+|f(x)-f(c)| < f(c)+M(b-a),$$

即 $f(x)$ 在(a,b) 内有界,这与假设相矛盾. 逆定理不真,例如

$$f(x) = \sin\frac{1}{x},$$

在$(0,1)$ 内有界,但 $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$,

却是无界的.

【1255】 证明:如果函数 $f(x)$ 在有穷或无穷区间(a,b) 内具有有界导数 $f'(x)$,则 $f(x)$ 在(a,b) 内是一致连续的.

证　设 $|f'(x)| \leqslant M \quad x \in (a,b)$,

对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$,则当 $x_1,x_2 \in (a,b)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,

有 $|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2||f'(\xi)|$

$$\leqslant M|x_1-x_2|<\varepsilon,$$

其中,ξ 在 x_1 与 x_2 之间.

因此,$f(x)$ 在(a,b) 上一致连续.

【1256】 证明:如果函数 $f(x)$ 在无穷区间$(x_0,+\infty)$ 内可微分,并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$,亦即当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)=o(x)$.

证 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

故对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $R_1>\max\{x_1,0\}$,

使当 $x>R_1$ 时,恒有 $|f'(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

由有限增量公式,当 $x>R_1$ 时有

$$|f(x)-f(R_1)|=|x-R_1|\cdot|f'(\xi)|$$

$$<\frac{\xi}{2}(x-R_1),$$

其中 $\quad R_1<\xi<x.$

从而 $\quad |f(x)|\leqslant f(R_1)+\dfrac{\varepsilon}{2}|x-R_1|.$

取 $R_2>R_1$,使$\dfrac{|f(R_1)|}{R_2}<\dfrac{\varepsilon}{2}$,则当 $x>R_2$ 时

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{f(R_1)}{x}\right|+\frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{x-R_1}{x}\right|$$

$$<\frac{|f(R_1)|}{R_2}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此 $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0.$

【1257】 证明:如果函数 $f(x)$ 在无穷区间$(x_0,+\infty)$ 内可微分,并且当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)=o(x)$,则 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$,特别是,如果存在:$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=k$,则 $k=0$.

证 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$,所以,对于任意常数 a,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)-\frac{f(a)}{x-a}\right]=0.$$

于是,对 $a_n=\max\{n,x_0+1\}\quad(n=1,2,\cdots)$,总存在 $b_n>a_n$,使得

$$\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right|<\frac{1}{n}.$$

由拉格朗日定理知,存在 c_n:$a_n<c_n<b_n$,使得

$$f'(c_n)=\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n},$$

因此 $\quad |f'(c_n)|<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$,

即 $\quad \lim\limits_{x\to\infty}|f'(c_n)|=0.$

由于 $\quad c_n\geqslant a_n>n$,

故 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}c_n=+\infty$,

故 $\quad \underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|f'(x)|=0.$

特别地,如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$,

则 $\quad |k|=\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|f'(x)|=0.$

因此 $k=0$.

【1258】 (1) 证明:如果:

① 函数 $f(x)$ 在闭区间$[x_0,X]$上有定义且是连续的;

② $f(x)$ 在区间(x_0,X)内有有限导数 $f'(x)$;

③ 存在有限或无限极限

$$\lim_{x\to x_0+0}f'(x)=f'(x_0+0),$$

则存在相应的有穷或无穷单边导数 $f'_+(x_0)$ 且

$$f'_+(x_0)=f'(x_0+0).$$

(2) 证明:函数

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}\qquad (x\neq 1)\text{ 及 } f(1)=0,$$

存在有限极限$\lim\limits_{x\to 1}f'(x)$,但函数$f(x)$没有单边导数$f'_-(1)$及$f'_+(1)$. 给出这个事实的几何解释.

但是在这一点存在广义的单边导数(参习题 1009.1).

证 (1) 由有限增量公式,有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\Delta x)$$

$$(\Delta x>0,0<\theta<1).$$

当 $\Delta x\to +0$ 时 $x_0+\theta\Delta x\to x_0+0$.

由假设条件知

$$\lim_{\Delta x\to+0}f'(x_0+\theta\Delta x)=f'(x_0+0).$$

所以 $$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+0),$$

即 $$f'_+(x_0)=f'(x_0+0).$$

(2) 当 $x\neq 1$ 时,

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

于是 $$\lim_{x\to 1}f'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2},$$

但 $$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\arctan\frac{1+x}{1-x}}{x-1}=-\infty,$$

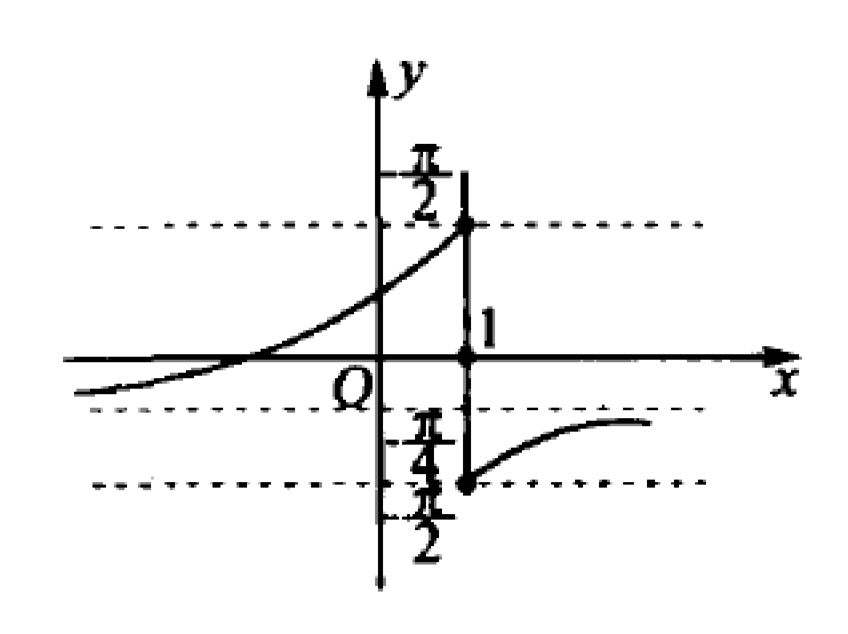
$$\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{\arctan\frac{1+x}{1-x}}{x-1}=-\infty.$$

所以 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$ 均不存在.

因为 $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=-\frac{\pi}{2},\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\frac{\pi}{2},$

即 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类不连续点. 函数在这点产生了跳跃. 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无导数.

$y=f(x)$ 的图形如 1258 题图所示



1258 题图

【1259】　证明:当 $a<x<b$ 时,如果 $f'(x)=0$,则当 $a<x<b$ 时,$f(x)=$ 常数.

证　取点 $x_0\in(a,b)$,则当 $x\in(a,b)$ 时,由有限增量公式可得 $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$,

其中 c 位于 x_0 与 x 之间. 由于 $f'(c)=0$.

故　　$f(x)-f(x_0)=0$,

即　　$f(x)=f(x_0)=$ 常数.

【1260】　证明:导数为常数 $f'(x)=k$ 的唯一函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是线性函数 $f(x)=kx+b$.

证　因为 $(f(x)-kx)'=f'(x)-k=0$.

于是　　$f(x)-kx\equiv b$　　(常数),

故　　$f(x)=kx+b$　　(线性函数).

【1261】　如果 $f^{(n)}(x)=0$,函数 $f(x)$ 能有什么性质?

解　$f(x)$ 为次数不超过 n 的多项式,事实上,当 $f'(x)=0$ 时,由 1260 题结果知 $f(x)=kx+b$ 即当 $n=1$ 时,命题成立.

假设当 $n=k$ 时,命题成立,下面证明当 $n=k+1$ 时,命题成立. 即 $f^{(k+1)}(x)=0$.

由归纳假设知 $f'(x)$ 为次数不超过 k 的多项式,设

$$f'(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_0,$$

其中 $a_0,\cdots,a_k$ 为常数，设

$$F(x)=f(x)-\left(\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}+\frac{a_{k-1}}{k}x^k+\cdots+a_0x\right).$$

则 $$F'(x)=f'(x)-(a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_0)=0.$$

因此 $$F(x)=C(\text{常数}),$$

即 $$f(x)=\frac{a_k}{k+1}a^{k+1}+\frac{a_{k-1}}{k}x^k+\cdots+a_0x+C.$$

因此，由数学归纳法知，命题对任何自然数均成立.

【1261.1】 设 $f(x)\in c^{(\infty)}(-\infty,+\infty)$，且对于每个 x 存在自然数 $n_x(n_x\leqslant n)$，以致 $f^{(n_x)}(x)=0$. 证明函数 $f(x)$ 是多项式.

证 对于任意的 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，一定存在 $0\leqslant l\leqslant n$，及数列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$，

及 $$f^{(l)}(x_k)=0.$$

事实上，取 $x_k=x_0+\dfrac{1}{k}$，由假设知，存在 $n_{x_k}(n_{x_k}\leqslant n)$ 使

$$f^{(n_{x_k})}(x_k)=0.$$

由于 $n_{x_k}\leqslant n$，故存在 $l(l\leqslant n)$ 及一子列 $\{x_{k_i}\}$ 使得 $n_{x_{k_i}}=l$. 不妨仍以 $\{x_k\}$ 记此子序列，故

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x_0,f^{(l)}(x_k)=0.$$

由 $f^{(l)}(x)$ 的连续性，知

$$f^{(l)}(x_0)=\lim_{k\to\infty}f^{(l)}(x_k)=0.$$

由于 $$f^{(l)}(x_0)=f^{(l)}(x_k)=0,$$

由罗尔定理知，存在 $x_k^{(1)}\in(x_0,x_k)$，使得

$$f^{(l+1)}(x_k^{(1)})=0.$$

由于 $$\lim_{k\to\infty}x_k^{(1)}=x_0,$$

再由 $f^{(l+1)}(x)$ 的连续性有

$$f^{(l+1)}(x_0)=0,$$

依此类推，我们可得对任何大于等于 l 的自然数 m，都有

$$f^{(m)}(x_0)=0,$$

特别地，$f^{(n)}(x_0)=0$，由 x_0 的任意性，有

$$f^{(n)}(x)=0 \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

由 1261 题的结论有，$f(x)$ 为次数不超过 n 的多项式.

【1262】 证明：满足方程 $y'=\lambda y$（$\lambda=$常数）的唯一函数 $y=y(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是指数函数：$y=ce^{\lambda x}$. 其中 c 为任意常数.

提示：研究 $(ye^{-\lambda x})'$.

证　设 $y=y(x)$ 是满足方程的函数，令

$$F(x)=ye^{-\lambda x},$$

则 $$F'(x)=y'e^{-\lambda x}-\lambda ye^{-\lambda x}=(y'-\lambda y)e^{-\lambda x}=0,$$

因此 $$F(x)=C \qquad (C\text{ 为常数}),$$

即 $$y=Ce^{\lambda x}.$$

【1263】 检验函数

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x},$$

及 $$g(x)=\arctan x,$$

在 (1) $x<1$ 及 (2) $x>1$ 的范围内具有相同的导数.

推导这些函数之间的关系.

解　当 $x<1$ 或 $x>1$ 时，

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2},$$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

故 $$f'(x)=g'(x) \qquad (x>1\text{ 或 }x<1).$$

因此 $f(x)-g(x)=C_1$，当 $x<1$ 时.

$f(x)-g(x)=C_2$，当 $x>1$ 时.

下面确定 C_1 及 C_2.

$$C_1=f(0)-g(0)=\arctan1-\arctan0=\frac{\pi}{4},$$

$$C_2 = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}.$$

因此 $\arctan\dfrac{1+x}{1-x} = \arctan x + \dfrac{\pi}{4} \quad (x<1)$,

$$\arctan\frac{1+x}{1-x} = \arctan x - \frac{3\pi}{4} \quad (x>1).$$

【1264】 证明以下恒等式:

(1) $2\arctan x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi\operatorname{sgn}x$, 当 $|x|\geqslant 1$;

(2) $3\arccos x - \arccos(3x-4x^3) = \pi$, 当 $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$.

证 (1) 当 $|x|>1$ 时,

$$\left(2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= 0.$$

故 $2\arctan x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = C_1$ (当 $x>1$ 时),

$$2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = C_2 \quad (\text{当 } x<-1 \text{ 时}).$$

所以 $C_1 = 2\arctan\sqrt{3} + \arcsin\dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \pi$,

$$C_2 = 2\arctan(-\sqrt{3}) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\pi.$$

故当 $|x|>1$ 时,

$$2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi\operatorname{sgn}x.$$

当 $|x|=1$ 时，上式显然成立.

因此，当 $|x|\geqslant 1$ 时，

$$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x.$$

(2) 当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，

$$\begin{aligned}&[3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)]'\\&=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}\cdot(3-12x^2)\\&=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}}\cdot 3(1-4x^2)\\&=0.\end{aligned}$$

故
$$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=C\quad\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right).$$

将 $x=0$ 代入上式得 $C=3\arccos 0-\arccos 0=\pi$，

当 $x=\pm\frac{1}{2}$ 时，显然有 $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$.

因此，当 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$ 时 $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$.

【1265】 证明：如果

(1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的；

(2) 在此区间内具有有穷导数 $f'(x)$；

(3) 不是线性函数；

则在区间 (a,b) 内至少能找到一个点 c，使得

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

给出这一事实的几何解释.

证　当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，

设 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

则
$$F(a)=F(b)=0.$$

且当 $a<x<b$ 时，$F(x)\neq 0$($f(x)$ 为非线性函数). 设在 c_1 点($a<c_1<b$)，$F(c_1)\neq 0$，不妨设 $F(c_1)>0$，在区间$[a,c_1]$及$[c_1,b]$上分别应用拉格朗日定理，存在 $z_1\in(a,c_1)$ 使

$$F'(z_1)=\frac{F(c_1)-F(a)}{c_1-a}=\frac{F(c_1)}{c_1-a}>0.$$

$z_2\in(c_1,b)$，使

$$F'(z_2)=\frac{F(b)-F(c_1)}{b-c_1}=\frac{-F(c_1)}{b-c_1}<0.$$

而 $$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

所以 $$f'(z_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

$$f'(z_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

因此，当$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant 0$ 时 $|f'(z_1)|>\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$；

当$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$ 时，

$$|f'(z_2)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

于是，命题得证.

这个事实的几何意义是：对于一条非直线的连续曲线段，如果曲线段上每点都存在不垂直于 Ox 轴的切线，则在曲线上至少存在一点 C，使得在该点曲线的切线斜率的绝对值大于连结该曲线段两个端点$(a,f(a))$，$(b,f(b))$的弦的斜率的绝对值. 亦即，该切线比弦更陡.

【1266】 证明：如果

(1) 函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上有二阶导数 $f''(x)$；

(2) $f'(a)=f'(b)=0$；

则在区间(a,b)内至少存在一个点 c，使得

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证　令 $M=\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

反设　$|f''(x)|<M \quad (a<x<b)$,

取 x_0 为 $[a,b]$ 中任意固定点，作函数

$$F(x)=f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)],$$

$$G(x)=(x-x_0).$$

不妨设 $x>x_0$，那么有

$$F(x_0)=G(x_0)=0,$$

$$F'(x)=f'(x)-f'(x_0),$$

$$G'(x)=2(x-x_0),$$

$$F'(x_0)=G'(x_0)=0.$$

且　$$F''(x)=f''(x),$$

$$G''(x)=2.$$

在 $[x_0,x]$ 上，$F(x)$ 与 $G(x)$，及 $F'(x)$ 与 $G'(x)$ 满足柯西定理的条件，对 $F(x)$ 与 $G(x)$ 及 $F'(x)$ 与 $G'(x)$ 应用柯西定理，得

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(c)}{G'(c)}$$

$$=\frac{F'(c)-F'(x_0)}{G'(c)-G'(x_0)}=\frac{F''(\xi)}{G''(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{2}.$$

其中 $c\in(x_0,x)$，$\xi\in(x_0,c)$，从而 $\xi\in(x_0,x)$，当 $x<x_0$，类似地讨论，我们有相同的结论，所以

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2. \quad ①$$

其中 ξ 是位 x_0 与 x 之间的点. 特别地，在 ① 中取

$$x_0=a, x=\frac{a+b}{2},$$

并注意到 $f'(a)=0$，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c_1), \quad ②$$

其中　$a<c_1<\frac{a+b}{2}$,

再令　$x_0=b, x=\frac{a+b}{2}$,

得 $$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c_2), \quad ③$$

其中 $\frac{a+b}{2}<c_2<b.$

由 ② 及 ③ 式得

$$\begin{aligned}
&|f(b)-f(a)| \\
&=\left|\frac{(b-a)^2}{8}(f''(c_2)-f''(c_1))\right| \\
&\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}(|f''(c_2)|+|f''(c_1)|)<\frac{(b-a)^2}{4}M \\
&=\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)| \\
&=|f(b)-f(a)|.
\end{aligned}$$

矛盾!因此,在(a,b)至少存在一点 c,使

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

【1267】 汽车从某个起点站开始行驶,在 t 秒钟内跑完了全程,在此时间内经过的距离为 s 米. 证明:汽车运动的加速度的绝对值在某个瞬间不小于$\frac{4s}{t^2}\frac{米}{秒^2}$.

证 设 $s=f(t)$.

则加速度为 $a(t)=\frac{d^2s}{dt^2}=f''(t)$,

则 1266 题的结果知,在$(0,t)$内至少存在一点 t_1,使得

$$|a(t_1)|=|f''(t_1)|\geqslant\frac{4|f(t)-f(0)|}{|t-0|^2}=\frac{4s}{t^2}.$$

§7. 函数的递增、递减.不等式

1. 函数的递增和递减 如果当$a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant b$时,$f(x_2)>f(x_1)$(或者对应地当 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 时,$f(x_2)<f(x_1)$),则称函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$是递增(或递减)函数.

如果可微分函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$递增(或递减),则当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时 $f'(x)\geqslant 0$,(或者当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,$f'(x)\leqslant 0$).

2. 函数递增(或递减)的充分条件 如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上是连续的,并且在区内有正(或负)导数 $f'(x)$,则函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上递增(或递减).

确定下列函数在严格意义上的单调(递增或递减)区间(1268 ~ 1178).

【1268】 $y = 2 + x - x^2$.

解 $y' = 1 - 2x$.

当 $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$时,$y' > 0$,函数增大;

当 $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$时,$y' < 0$,函数减小.

【1269】 $y = 3x - x^3$.

解 $y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$.

当$-\infty < x < -1$时,$y' < 0$,函数减小;

当$-1 < x < 1$时,$y' > 0$,函数增大;

当$1 < x < +\infty$时,$y' < 0$,函数减小.

【1270】 $y = \frac{2x}{1 + x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$.

当$-\infty < x < -1$时,$y' < 0$,函数减小;

当$-1 < x < 1$时,$y' > 0$,函数增大;

当$1 < x < +\infty$时,$y' < 0$,函数减小.

【1271】 $y = \frac{\sqrt{x}}{x + 100} \quad (x \geqslant 0)$.

解 $y' = \frac{-x + 100}{2\sqrt{x}(x + 100)^2}$.

当$0 < x < 100$时,$y' > 0$,函数增大;

当$100 < x < +\infty$时,$y' < 0$,函数减小.

【1272】 $y = x + \sin x$.

解 $y' = 1 + \cos x \geqslant 0$,且 y' 只在弧立点

$$x = (2k + 1)\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \cdots).$$

为零. 故函数在$(-\infty,+\infty)$内增大.

【1273】 $y=x+|\sin 2x|$.

解 $y'=1+2\dfrac{|\sin 2x|}{\sin 2x}\cdot\cos 2x$

$$\left(x\neq\frac{k\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right),$$

因此,当 $1+2\cos 2x>0$ 且 $\sin 2x>0$

或 $1-2\cos 2x>0$ 且 $\sin 2x<0$ 时,

$y'>0$. 所以

当 $x\in\left(\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$时,$y'>0$,函数增大.

当 $x\in\left(\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3},\dfrac{(k+1)\pi}{2}\right)$时,$y'<0$,函数减小.

【1274】 $y=\cos\dfrac{\pi}{x}$.

解 $y'=\dfrac{\pi}{x^2}\sin\dfrac{\pi}{x}$

当 $2k\pi<\dfrac{\pi}{x}<(2k+1)\pi$ 及 $-(2k+2)\pi<\dfrac{\pi}{x}<-(2k+1)\pi$($k=1,2,\cdots$) 及 $0<\dfrac{\pi}{x}<\pi$ 时,亦即 $x>1$,$x\in\left(\dfrac{1}{2k+1},\dfrac{1}{2k}\right)$及 $x\in\left(-\dfrac{1}{2k+1},-\dfrac{1}{2k+2}\right)$时,$y'>0$,函数增大($k=1,2,\cdots$).

同样,当 $x\in\left(\dfrac{1}{2k+2},\dfrac{1}{2k+1}\right)$及 $x\in\left(-\dfrac{1}{2k},-\dfrac{1}{2k+1}\right)$时,$y'<0$,函数减小($k=1,2,\cdots$).

【1275】 $y=\dfrac{x^2}{2^x}$.

解 $y'=\dfrac{2x-x^2\ln 2}{2^x}=\dfrac{x(2-x\ln 2)}{2^x}$.

当 $-\infty<x<0$ 及 $\dfrac{2}{\ln 2}<x<+\infty$ 时,$y'<0$,函数减小.

当 $0<x<\dfrac{2}{\ln 2}$ 时,$y'>0$,函数增大.

【1276】 $y = x^n e^{-x} \quad (n > 0, x \geqslant 0)$.

解 $y' = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$.

当 $x \in (0,n)$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $x \in (n,+\infty)$ 时，$y' < 0$，函数减小.

【1277】 $y = x^2 - \ln x^2$.

解 $y' = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x}$.

当 $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$ 时，$y' < 0$，函数减小；

当 $x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$ 时，$y' > 0$，函数增大.

【1278】 若 $x > 0$，$f(x) = x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin\ln x\right)$，及 $f(0) = 0$.

解
$$f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sin\ln x + x(\cos\ln x)\cdot\frac{1}{x}$$
$$= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right) \qquad (x > 0).$$

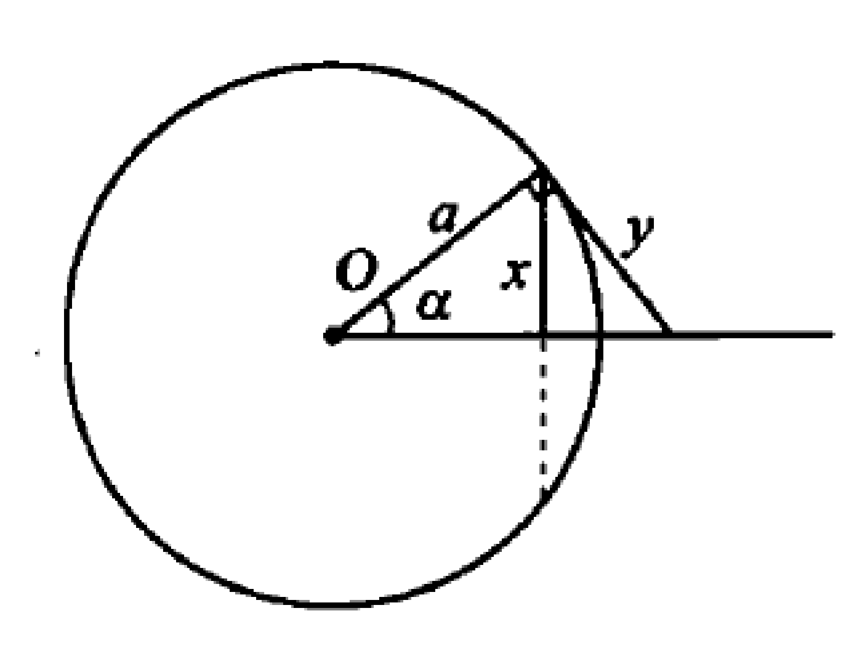
令 $f'(x) = 0$，即 $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解之得 $x = e^{2k\pi + \frac{13}{12}\pi}$，$\quad x = e^{2k\pi - \frac{7}{12}\pi} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

当 $x \in (e^{2k\pi - \frac{7}{12}\pi}, e^{2k\pi + \frac{13}{12}\pi})$ 时，$f'(x) > 0$，函数增加. 当 $x \in (e^{2k\pi + \frac{13}{12}\pi}, e^{2k\pi + \frac{17}{12}\pi})$ 时，$f'(x) < 0$，函数减小. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

【1279】 证明：内接于圆的正 n 边形，当边的数目 n 增加时，其周长 p_n 递增，而外切于此圆的正 n 边形的周长 P_n 则递减. 利用这一点证明当 $n \to \infty$ 时，p_n 和 P_n 有相同的极限.

证 如 1279 题图所示，我们有



1279 题图

$$p_n = 2nx = 2na\sin\alpha = 2na \cdot \sin\frac{\pi}{n},$$

$$P_n = 2ny = 2na \cdot \tan\alpha = 2na \cdot \tan\frac{\pi}{n}.$$

设 $$f(x) = \frac{2a}{x} \cdot \sin\pi x,$$

则 $$f'(x) = 2a\frac{\pi x\cos\pi x - \sin\pi x}{x^2}.$$

考虑函数 $h(t) = t\cos t - \sin t, h'(t) = -t\sin t$.

当 $t \in (0,\pi)$ 时，$h'(t) < 0$，$h(t)$ 减小，故

$$h(t) < h(0) = 0, t \in (0,\pi).$$

从而，当 $0 < x < 1$ 时，$f'(x) < 0$，所以，在 $(0,1)$ 内，$f(x)$ 单调减，故当 n 增大时，$p_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ 逐渐增大，令

$$g(x) = \frac{2a}{x}\tan\pi x,$$

则 $$g'(x) = 2a\frac{\pi x - \sin\pi x\cos\pi x}{x^2\cos^2\pi x}.$$

显然，当 $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$g'(x) > 0$，$g(x)$ 是增函数.

当 x 变小时，$g(x)$ 逐渐减小，故 $P_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$，当 n 增大时，逐渐变小. 所以，

$$p_n < p_{n+1}, P_{n+1} < P_n.$$

显然有 $p_{n+1} < P_{n+1}$，于是有

$$p_3 < p_n < p_{n+1} < P_{n+1} < P_n < P_3,$$

故 $\{p_n\}$ 是单调增的有界数列，$\{P_n\}$ 是单调减的有界数. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$，及 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ 均存在. 事实上，

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} 2na \cdot \sin\frac{\pi}{n} = 2a\pi,$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} 2na \cdot \tan\frac{\pi}{n} = 2a\pi.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} P_n.$$

【1280】 证明：函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 与 $(0,+\infty)$ 内递增.

证 设 $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$，

$$y' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right].$$

当 $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>0$，我们只需考虑，$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$ 的正负性. 设

$$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x},$$

则
$$g'(x)=-\frac{1}{x(1+x)^2}.$$

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调增大，而

$$g(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}g(x)=0.$$

所以，当 $-\infty<x<-1$ 时，$g(x)>0$. 而当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调减小，而

$$g(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0.$$

所以，当 $0<x<+\infty$ 时，$g(x)>0$. 因此，当 $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ 时，$y'>0$，$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 是增大的.

【1281】 证明：有理整函数

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \qquad (n\geqslant 1, a_n\neq 0)$$

在区间 $(-\infty,-x_0)$ 及 $(x_0,+\infty)$ 内是单调的（在严格意义上讲！）. 其中 x_0 是足够大的正数.

证 $P'(x)$

$$=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$$

$$=na_nx^{n-1}\left(1+\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_nx}+\cdots+\frac{a_1}{na_nx^{n-1}}\right).$$

而 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_nx}+\cdots+\frac{a_1}{na_nx^{n-1}}\right)=0,$$

故存在 $x_0>0$，使得当 $|x|>x_0$ 时，

$$\left|\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_nx}+\cdots+\frac{a_1}{na_nx^{n-1}}\right|<\frac{1}{2},$$

从而 $$1+\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_nx}+\cdots+\frac{a_1}{na_nx^{n-1}}>\frac{1}{2}>0.$$

故当 $-\infty<x<-x_0$ 或 $x_0<x<+\infty$ 时，$P'(x)$ 的符号与 na_nx^{n-1} 的符号相同，即 $P'(x)$ 在区间 $(-\infty,-x_0)$ 或 $(x_0,+\infty)$ 内保持定号. 因此，$P(x)$ 在 $(-\infty,-x_0)$ 及 $(x_0,+\infty)$ 内都是严格单调的.

【1282】 证明：有理函数

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots b_mx^m}\qquad(a_nb_m\neq 0).$$

若不恒等于常数，则在区间 $(-\infty,-x_0)$ 及 $(x_0,+\infty)$ 内是单调的(在严格意义上讲!). 其中 x_0 是足够大的正数.

证 我们讨论两种情况，

情况 Ⅰ：$n\neq m$，

$$\begin{aligned}R'(x)=&\frac{1}{(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)^2}\\&\{[a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}][b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m]\\&-[b_1+2b_2x+\cdots+mb_mx^{m-1}][a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n]\}\\=&\frac{(n-m)a_nb_mx^{n+m-1}}{(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)^2}\Big[1+\frac{(n-m+1)a_nb_{m-1}-(n-m-1)b_ma_{n-1}}{(n-m)a_nb_mx}\\&+\cdots+\frac{a_1b_0-a_0b_1}{(n-m)a_nb_mx^{m+n-1}}\Big].\end{aligned}$$

类似于 1281 题的讨论知，存在 $x_0>0$，使得当 $|x|>x_0$ 时

$$\begin{aligned}1&+\frac{(n-m+1)a_nb_{m-1}-(n-m-1)b_ma_{a-1}}{(n-m)a_nb_mx}\\&+\cdots+\frac{a_1b_0-a_0b_1}{(n-m)a_nb_mx^{n+m-1}}>0.\end{aligned}$$

即 $R'(x)$ 与 $(n-m)a_nb_mx^{n+m-1}$ 有相同的符号. 因此，$R'(x)$ 在 $(-\infty,-x_0)$ 或 $(x_0,+\infty)$ 内保持定号. 故 $R(x)$ 在 $(-\infty,-x_0)$

及$(x_0,+\infty)$中都是严格单调的.

情况 Ⅱ:$m=n$,此时

$$R(x)=\frac{a_n}{b_m}+\frac{c_kx^k+\cdots+c_1x+c_0}{b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0},$$

其中　$k<m, c_k\neq 0$.

由情况 Ⅰ 的证明知,存在$x_0>0$,使得

$$g(x)=\frac{c_kx^k+\cdots+c_1x+c_0}{b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0},$$

在$(-\infty,-x_0)$及$(x_0,+\infty)$内都是严格单调的,因此$R(x)$在$(-\infty,-x_0)$及$(x_0,+\infty)$内都是严格单调的. 证毕.

【1283】 单调函数的导数一定是单调的吗?研究例子:

$$f(x)=x+\sin x.$$

解　不,例如函数$f(x)=x+\sin x$,

在$(-\infty,+\infty)$内单调(见1272题),但$f'(x)=1+\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内却不是单调的.

【1284】 证明:如果$\varphi(x)$是单调递增的可微分函数且

$$|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)\qquad(当\ x\geqslant x_0),$$

则　$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0)\qquad(当\ x\geqslant x_0),$$

对这一事实给出几何解释.

证　法一:作函数

$$\psi(x)=\varphi(x)-f(x).$$

由拉格朗日定理知

$$\psi(x)-\psi(x_0)=\psi'(\xi)(x-x_0)\qquad x_0<\xi<x.$$

由$|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)$知

$$\psi'(\xi)=\varphi'(\xi)-f'(\xi)\geqslant 0.$$

从而　$\psi(x)-\psi(x_0)\geqslant 0\qquad(x\geqslant x_0)$,

所以　$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant f(x)-f(x_0)$.

再令　$\psi_1(x)=\varphi(x)+f(x)$,

同样可得$\psi_1(x)-\psi_1(x_0)\geqslant 0\qquad(x\geqslant x_0)$.

所以 $\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant-(f(x)-f(x_0))$,

因此 $\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant|f(x)-f(x_0)|$.

法二:反设存在一点 $b>x_0$,使得

$$|f(b)-f(x_0)|>\varphi(b)-\varphi(x_0).$$

设
$$F(x)=f(x)-f(x_0)-\frac{f(b)-f(x_0)}{\varphi(b)-\varphi(x_0)}[\varphi(x)-\varphi(x_0)],$$

则 $F(x_0)=F(b)=0$.

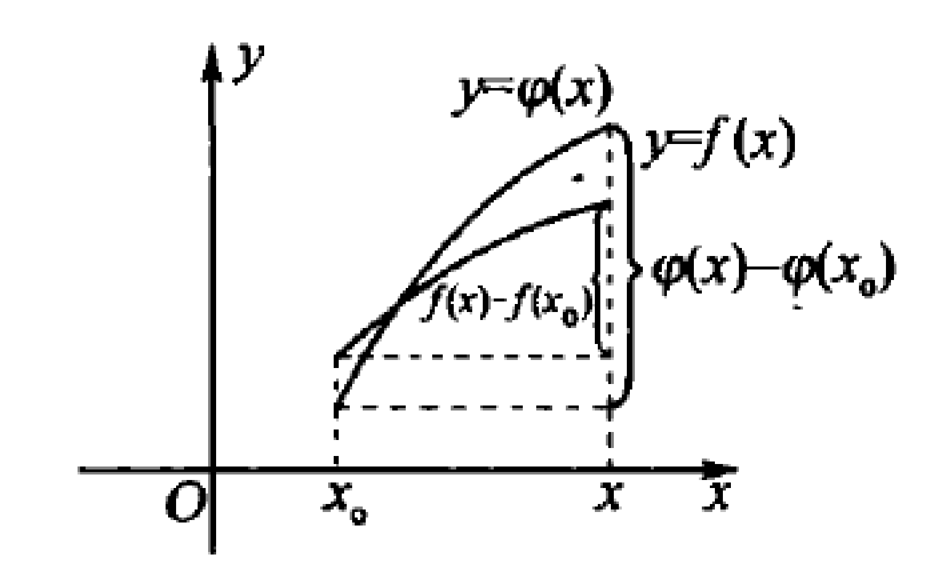
由罗尔定理知,存在点 $c\in(x_0,b)$,使 $F'(c)=0$,即

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(x_0)}{\varphi(b)-\varphi(x_0)}\varphi'(c)=0.$$

所以
$$|f'(c)|=\frac{|f(b)-f(x_0)|}{\varphi(b)-\varphi(x_0)}\varphi'(c)>\varphi'(c),$$

这与题设相矛盾.因此 $|f'(x)|\leqslant\varphi'(x),(x\geqslant x_0)$.

其几何意义是:若一单调上升的曲线各点的切线都比另一曲线上对应点的切线"陡",则此曲线上每一条弦必比另一曲线上对应的弦"陡".如 1284 题图所示.



1284 题图

【1285】 假设函数 $f(x)$ 在区间 $a\leqslant x<+\infty$ 内是连续的,且当 $x>a$ 时 $f'(x)>k>0$,其中 k 为常数.

证明:如果 $f(a)<0$,则在区间 $\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right)$ 内方程 $f(x)=0$,有一个而且仅有一个实根.

证 由有限增量公式有

$$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-f(a)$$

$$=-\frac{f(a)}{k}\cdot f'(\xi)>-\frac{f(a)}{k}\cdot k=-f(a),$$

其中 $a<\xi<a-\frac{f(a)}{k}$.

所以 $f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)>0$,

又 $f(a)<0$,

故根据连续函数的介值定理知：至少存在一点 $c\in\left(a,a-\frac{f(a)}{k}\right)$，使得 $f(c)=0$，又当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$. 故，$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内严格单调上升. 因此，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\frac{f(a)}{a}\right)$ 内恰有一个实根.

【1286】 如果在某个邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内，函数增量

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0),$$

的符号与自变数增量 $\Delta x_0=x-x_0$ 的符号相同，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 递增.

证明：如果函数 $f(x)(a<x<b)$ 在某个有穷或无穷区间 (a,b) 的每个点递增，则它在该区间内是递增函数.

证 设 $x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，我们要证明 $f(x_1)<f(x_2)$. 对于 $[x_1,x_2]$ 中每一点 c，由假设都存在开邻域 $\Delta_c=(c-\delta_c,c+\delta_c)$ 使得当 $x\in\Delta_c$ 时，$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$.

于是 $\bigcup\limits_{c\in[x_1,x_2]}\Delta_c\supset[x_1,x_2]$，由波内尔有限复盖定理，从 $\{\Delta_c\}$ 中可选取有限个开区间复盖 $[x_1,x_2]$，设为 $\Delta c_1,\Delta c_2,\cdots,\Delta c_m$.

不妨设 $x_1<c_1<c_2<\cdots<c_m<x_2$. 而可设诸 Δc_i 互不包含. (因为若 $\Delta c_i\subset\Delta c_j$，内可将 Δc_i 舍去) 于是，必有 $x_1\in\Delta c_1$. 因为若 $x_1\notin\Delta c_i$，则存在 $j>1$，使得 $x_1\in\Delta c_j$，则显然有 $\Delta c_1\subset\Delta c_j$，矛盾.

另外，$\Delta c_i\cap\Delta c_{i+1}\neq\phi$. 事实上，若 $\Delta c_i\cap\Delta c_{i+1}=\phi$，则 $c_i+\delta_{ci}$

必属于某 Δc_j，$j \neq i$，$j \neq i+1$. 若 $j < i$，则 $\Delta c_i \subset \Delta c_j$，矛盾. 若 $j > i+1$，则 $\Delta c_{i+1} \subset \Delta c_j$，也矛盾. 所以，我们可取 $\overline{x}_i \in \Delta c_i \cap \Delta c_{i+1}$ 使得 $c_i < \overline{x}_i < c_{i+1}$.

于是 $\quad f(c_i) < f(\overline{x}_i) < f(c_{i+1})$.

同理 $\quad x_2 \in \Delta c_m$.

因此，我们有

$$f(x_1) < f(c_1) < f(c_2) < \cdots < f(c_m) < f(x_2),$$

即 $f(x)$ 在 (a,b) 内是增函数.

【1287】 若 $x \neq 0$ 时，$f(x) = x + x^2 \sin \frac{2}{x}$，及 $f(0) = 0$，证明：$f(x)$ 在点 $x = 0$ 递增，但在围绕这个点的任何区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 内，并非是递增，其中 $\varepsilon > 0$ 是任意小的数.

绘制此函数的略图.

证 当 $x \neq 0$ 时，

$$f'(x) = 1 + 2x\sin\frac{2}{x} - 2\cos\frac{2}{x},$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x + \Delta x^2 \sin\frac{2}{\Delta x}}{\Delta x} = 1 > 0,$$

所以，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处增大. 设

$$x_k = \frac{1}{k\pi} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

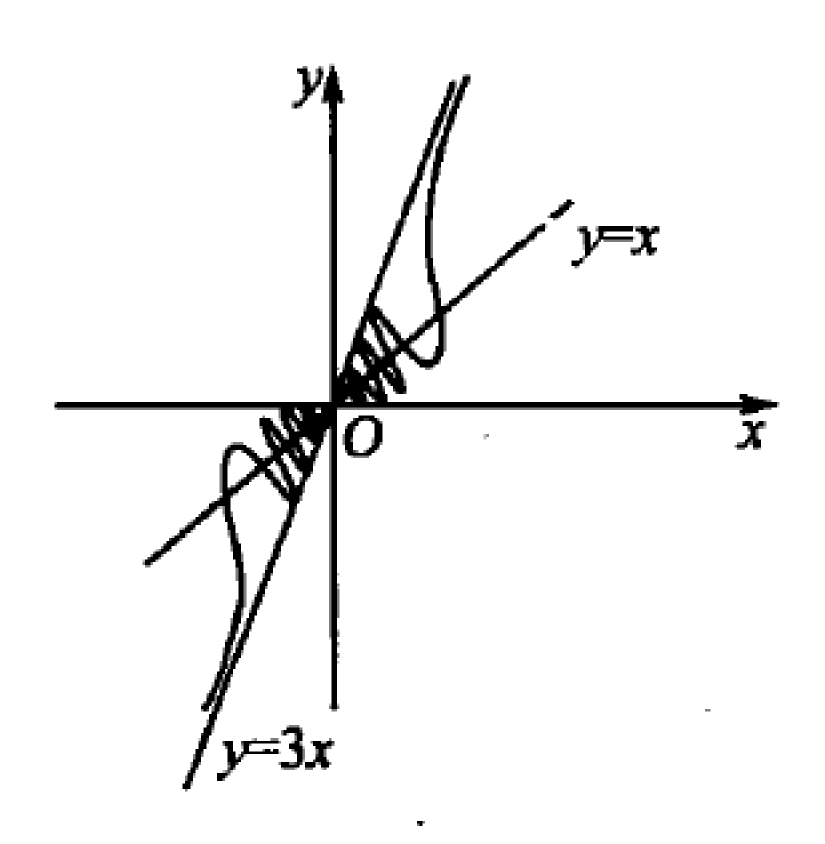
$$y_k = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

则

$$f'(x_k) = -1 < 0, f'(y_k) = 3 > 0.$$

因此，在 x_k 与 y_k 之间，$f(x)$ 由单调减小变到单调增大. 由于 $x_k \to 0$，$y_k \to 0 (k \to \infty)$ 故 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 内不是增大的，作无穷多次

振荡. 如 1287 题图所示.



1287 题图

【1288】 证明定理:如果

(1) 函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 可微分 n 次;

(2) $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)\qquad(k=0,1,\cdots n-1)$;

(3) 当 $x>x_0$ 时, $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$,

则当 $x>x_0$ 时,不等式 $\varphi(x)>\psi(x)$ 成立.

证　设

$$F(x)=\varphi(x)-\psi(x),$$

则

$$F^{(n)}(x)=\varphi^{(n)}(x)-\psi^{(n)}(x)>0\qquad(x>x_0).$$

且

$$F^{(k)}(x_0)=\varphi^{(k)}(x_0)-\psi^{(k)}(x_0)=0\qquad(k=0,1,\cdots n-1).$$

因此 $F^{(n-1)}(x)$ 当 $x>x_0$ 时是严格增大的,故

$$F^{(n-1)}(x)>F^{(n-1)}(x_0)=0\qquad(x>x_0).$$

由此知 $F^{(n-2)}(x)$ 在 $x>x_0$ 时是严格增加的,故

$$F^{(n-2)}(x)>F^{(n-2)}(x_0)=0\qquad(x>x_0).$$

依此类推,可得

$$F(x)>F(x_0)=0\qquad(x>x_0),$$

即

$$\varphi(x)>\psi(x)\qquad(x>x_0).$$

【1289】 证明以下不等式：

(1) $e^x > 1+x$ （当 $x \neq 0$ 时）；

(2) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ （当 $x > 0$ 时）；

(3) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ （当 $x > 0$ 时）；

(4) $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ （当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时）；

(5) $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ （当 $x > 0, y > 0$，且 $0 < \alpha < \beta$ 时）.

请作出不等式(1) ～ (4) 的几何解释.

证 (1) 设 $f(x) = e^x - 1 - x$，

则 $$f'(x) = e^x - 1,$$

当 $x > 0$ 时，$f'(x) > 0$，所以，在 $(0, +\infty)$ 内，$f(x)$ 单调增大. 故

$$f(x) > f(0) = 0 \quad (x > 0),$$

即 $$e^x > 1 + x \quad (x > 0).$$

当 $x < 0$ 时，

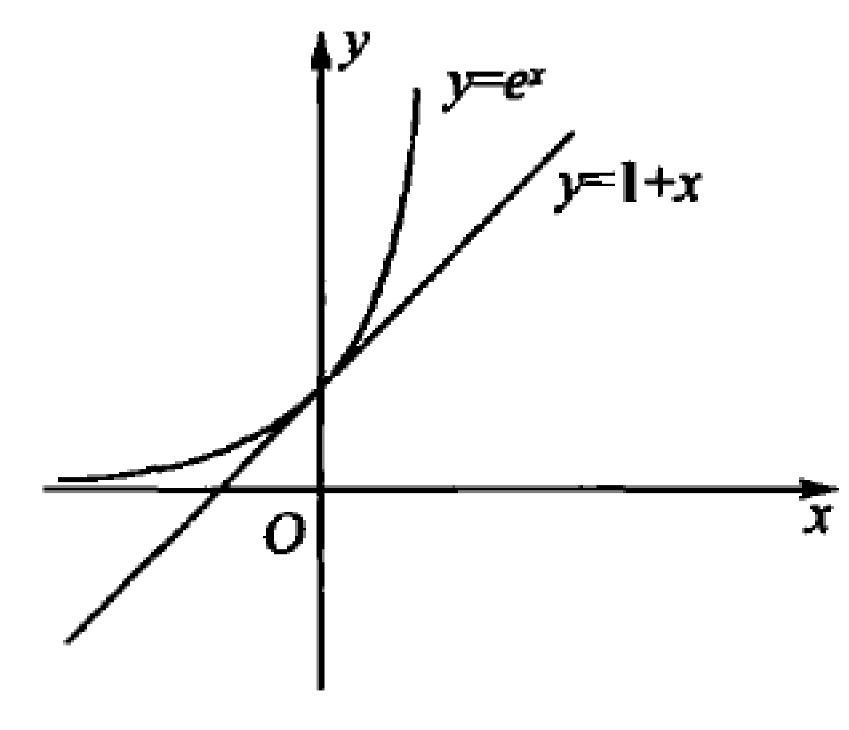
$$f'(x) < 0,$$

所以 $$f(x) > f(0) = 0 \quad (x < 0),$$

即 $$e^x > 1 + x \quad (x < 0).$$

总之，当 $x \neq 0$ 时 $e^x > 1 + x$.

此不等式的几何意义是：$x \neq 0$ 时曲线 $y = e^x$ 位于曲线 $y = 1 + x$ 的上方. 如 1289 题图 1 所示



1289 题图 1

(2) 设 $\varphi(x)=x-\ln(1+x)$,

则 $$\varphi'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0 \quad (x>0),$$

所以,$\varphi(x)$ 在$(0,+\infty)$ 增大,故

$$\varphi(x)>\varphi(0) \quad (x>0),$$

即 $$x>\ln(1+x).$$

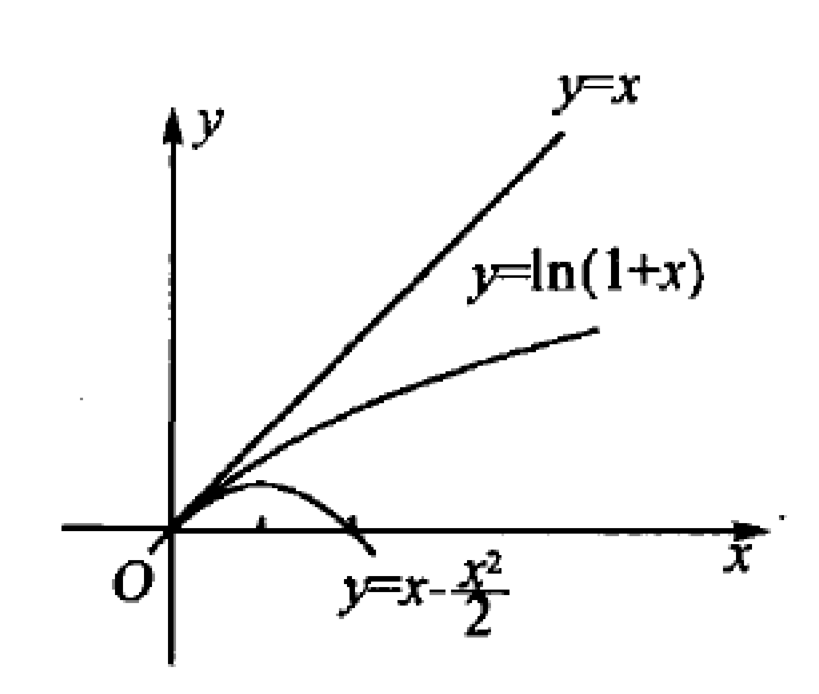
同理可证,当 $x>0$ 时,

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x),$$

因此,当 $x>0$ 时,

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x.$$

此不等式表示 $x>0$ 时曲线 $y=\ln(1+x)$ 介于抛物线 $y=x-\frac{x^2}{2}$ 与直线 $y=x$ 之间. 如 1289 题图 2 所示.



1289 题图 2

(3) 令 $F(x)=x-\sin x$,

则 $$F'(x)=1-\cos x,$$

所以,当 $x>0$,且 $x\neq 2n\pi(n=1,2,\cdots)$ 时,

$$F'(x)>0.$$

故 $F(x)$ 在 $x>0$ 时是严格增大的. 因此,当 $x>0$ 时,有

$$F(x)>F(0)=0,$$

即 $$\sin x<x \quad (x>0).$$

再设 $$G(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6},$$

则 $$G'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},$$

$$G''(x)=-\sin x+x.$$

由前面的证明知 $x>\sin x \quad (x>0)$,

所以,当 $x>0$ 时 $G''(x)>0$.

从而 $G'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格增大.故

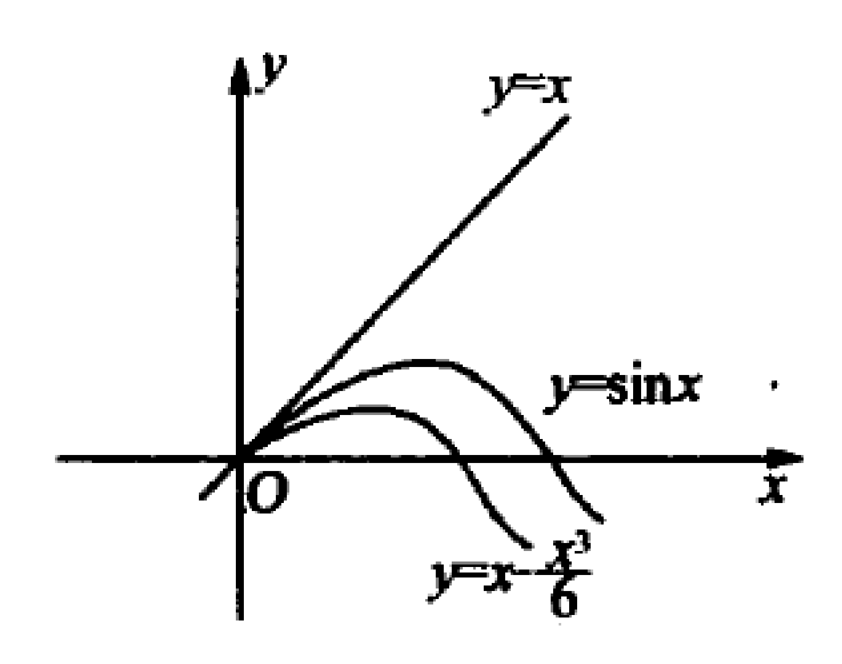
$$G'(x)>G'(0)=0 \quad (x>0),$$

所以 $$G(x)>G(0)=0 \quad (x>0),$$

即 $$\sin x>x-\frac{x^3}{6} \quad (x>0).$$

因此,当 $x>0$ 时 $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$.

此不等式表示:在 y 轴的右侧,曲线 $y=\sin x$ 介于曲线 $y=x-\frac{x^3}{6}$ 与直线 $y=x$ 之间,如 1289 题图 3 所示.



1289 题图 3

(4) 设

$$F(x)=\tan x-x-\frac{x^3}{3},$$

则 $$F'(x)=\sec^2 x-1-x^2,$$

$$F''(x)=2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x-2x$$

$$=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}-2x,$$

$$F'''(x)=2(1+3\tan^2 x)(1+\tan^2 x)-2.$$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$F'''(x)>0$,所以

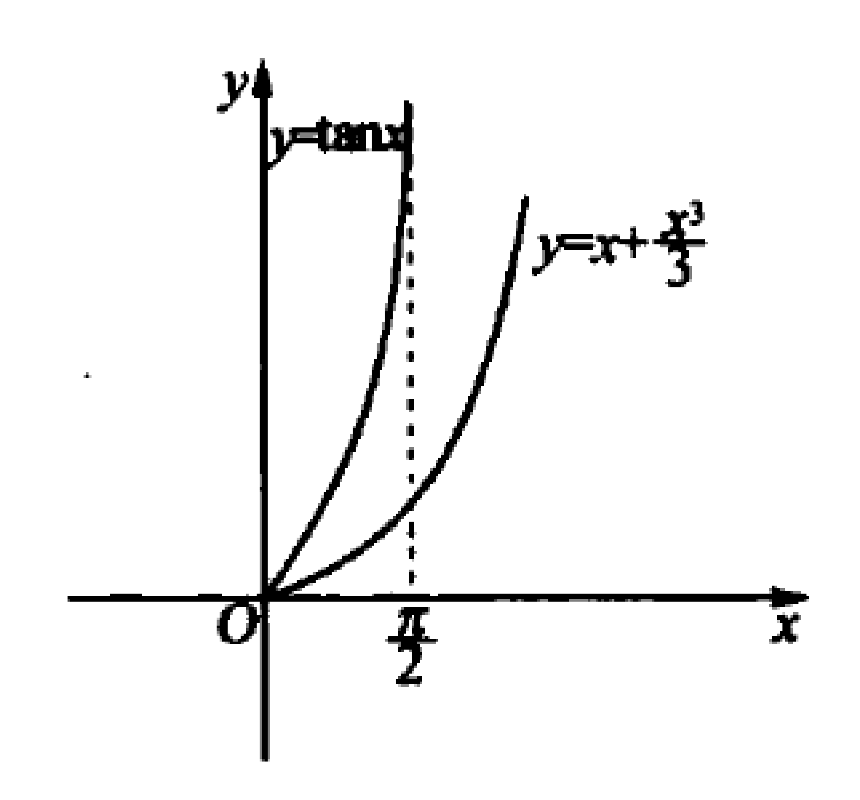
$$F''(x) > F''(0) = 0 \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

从而 $$F'(x) > F'(0) = 0 \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$F(x) > F(0) = 0 \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

即 $$\tan x > x + \frac{x^3}{3} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

此不等式表示，在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$内，曲线 $y = \tan x$ 在曲线 $y = x + \frac{x^3}{3}$ 的上方. 如 1289 题图 4 所示.



1289 题图 4

(5) 当 $x = y$ 时，不等式变为

$$2^{\frac{1}{\alpha}} \cdot x > 2^{\frac{1}{\beta}} x \qquad (x > 0),$$

由 $0 < \alpha < \beta$ 知 $2^{\frac{1}{\alpha}} > 2^{\frac{1}{\beta}}$，

所以，不等式显然成立.

当 $x \neq y$，且 $x > 0, y > 0$ 时，不妨设 $0 < \frac{y}{x} < 1$，令 $a = \frac{y}{x}$，则我们只须证明 $(1 + a^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (1 + a^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$.

令 $$f(t) = (1 + a^t)^{\frac{1}{t}}, F(t) = \frac{1}{t}\ln(1 + a^t),$$

则 $$F'(t) = \frac{a^t \cdot \ln a}{t(1 + a^t)} - \frac{\ln(1 + a^t)}{t^2}.$$

而由于 $a^t > 0$，所以，由本题(2) 的结果有

$$a^t-\frac{a^{2t}}{2}<\ln(1+a^t),$$

从而 $$F'(t)<\frac{a^t\ln a}{t(1+a^t)}-\frac{a^t-\frac{a^{2t}}{2}}{t^2}.$$

由于 $0<a<1$ 及 $t>0$,所以 $\ln a<0, a^t>a^{2t}>\frac{a^{2t}}{2}$,从而 $F'(t)<0\ (t>0)$,即 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是严格递减的,所以,$f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 是严格递减的.故当 $0<\alpha<\beta$ 时,有

$$(1+a^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(1+a^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

因此 $$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\qquad(x>0,y>0,x\neq y).$$

总之,当 $x>0,y>0,\beta>\alpha>0$ 时有

$$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

【1290】 证明:当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,不等式 $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$ 成立.

证 由 1289 题(3),我们已有

$$\sin x<x\qquad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

下面我们证明不等式的前半部,设

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\qquad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

则显然 $$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi},$$

而 $$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x).$$

由 1289 题(4) 知,当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\tan x>x+\frac{x^3}{3}>x,$$

且 $\cos x>0$,所以

$$f'(x)<0\qquad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

所以，$f(x)$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内是减小的，因而，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时

$$f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi},$$

即 $$\sin x>\frac{2}{\pi}x.$$

因此 $$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

【1291】 证明：当 $x>0$ 时，有不等式

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

证 设 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\mathrm{e}^{(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

则 $$f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right],$$

而当 $t>0$ 时，由 1289 题(2) 的结果有

$$\ln(1+t)<t.$$

所以，当 $x>0$ 时，

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}<0.$$

而 $$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}>0 \qquad (x>0),$$

故 $f'(x)<0\ (x>0)$，所以，在$(0,+\infty)$ 内 $f(x)$ 是严格递减的.

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\mathrm{e}$,

所以 $$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}>\mathrm{e} \qquad (x>0).$$

同理可证 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\mathrm{e} \quad (x>0)$.

因此，当 $x>0$ 时，有 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

【1292】 设等差级数和等比级数有相同的项数及相同的首项与末项，且它们每一项都是正数.

证明：等差级数各项的和大于或等于等比级数各项的和.

证 法一:设等差级数的公差为 d,等比级数的公比为 q.

如果 $d=0$,易见,两个级数数列均为常数数列,且通项相同.因此,其和相等.

如果 $d\neq 0$,不妨设 $d>0$(否则将数列颠倒,首项变末项即可).由于各项均为正的,所以 $q>0$,且 $q\neq 1$.

设首项为 a,则末项为 $a+nd=aq^n$,考虑函数

$$f(x)=a+xd-aq^x,$$

根据题设有 $f(0)=f(n)=0$. 所以存在一点 $c\in(0,n)$,使得 $f'(c)=0$,而

$$f''(x)=-aq^x\ln^2 q<0.$$

从而 $f'(x)=d-aq^x\ln q$.

为一递减函数,所以

当 $0<x<c$ 时,$f'(x)>0$,

当 $c<x<n$ 时,$f'(x)<0$.

从而当 $0\leqslant x\leqslant n$ 时,$f(x)\geqslant 0$,其中等号仅当 $x=0$ 及 $x=n$ 时成立.特别地,对 $0<k<n$,有

$$f(k)=a+kd-aq^k>0,$$

即 $a+kd>aq^k$.

所以 $\sum\limits_{k=0}^{n}(a+kd)>\sum\limits_{k=0}^{n}aq^k$.

法二:设等差级数各项为 $a_1,a_2,\cdots a_n$,公差为 d;等比级数各项为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,公比为 q,记其和为

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}a_k,S=\sum_{k=1}^{n}b_k.$$

当 $q=1$ 时,由 $a_1=b_1,a_n=b_n$,可得 $d=0$,从而

$$\sigma=S.$$

当 $q<1$ 时,由 $a_1=b_1$,

及 $a_n=a_1+(n-1)d,b_n=b_1q^{n-1}$,

且 $a_n=b_n$,

得 $a_1+(n-1)d=b_1q^{n-1}$,

即　$$\mathrm{d} = -\frac{1-q^{n-1}}{n-1}a_1 \qquad (a_1 > 0).$$

那么有
$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{k=1}^{n}[a_1 + (k-1)\mathrm{d}] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[a_1 - \frac{k-1}{n-1}(1-q^{n-1})a_1\right] \\ &= a_1\left[n - \frac{1-q^{n-1}}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\right] \\ &= \frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}),\end{aligned}$$

$$S = \sum_{k=1}^{n-1}a_1q^{k-1} = a_1\frac{1-q^n}{1-q},$$

考察
$$\begin{aligned}&\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma - S) \\ &= n(1-q)(1+q^{n-1}) - 2(1-q^n) \\ &= n(1-q+q^{n-1}-q^n) - 2(1-q^n) \\ &= (n-2)(1-q^n) - nq(1-q^{n-2}).\end{aligned}$$

作函数
$$\varphi(t) = (n-2)(1-t^n),$$
$$\psi(t) = nt(1-t^{n-2}).$$

则有　$$\varphi(1) = \psi(1) = 0, \varphi'(1) = \psi'(1) = -n(n-2).$$

设　$$F(t) = \varphi(t) - \psi(t).$$

则
$$\begin{aligned}F''(t) &= -n(n-1)(n-2)t^{n-2} + n(n-1)(n-2)t^{n-3} \\ &= n(n-1)(n-2)t^{n-3}(1-t).\end{aligned}$$

当 $0 < t < 1$ 时，$F''(t) > 0$，所以
$$F'(t) < F'(1) = 0.$$

故 $F(t)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数，从而
$$F(t) > F(1) = 0 \qquad (0 < t < 1),$$

即　$$\varphi(t) > \psi(t) \qquad (0 < t < 1),$$

从而，当 $0 < q < 1$ 时，
$$\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma - S) > 0.$$

所以 $\sigma > S$.

当 $q > 1$ 时,类似地证明可得 $\sigma > S$.

【1293】 根据不等式 $\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2 \geqslant 0$,证明柯西不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}b_k^2,$$

其中 $x, a_k, b_k (k = 1,\cdots n)$ 都是实数.

证 由于

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)x + \sum_{k=1}^{n}b_k^2,$$

对任何 x 都成立,故上述二次式的判别式不能为正,即

$$4\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right) \leqslant 0.$$

因此 $$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right).$$

【1294】 证明:正数的算术平均数不大于这些数的平方平均数,即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$.

证 利用 1293 题的结果,令

$$a_k = x_k, b_k = \frac{1}{n}.$$

则有 $$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2.$$

所以 $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

【1295】 证明:正数的几何平均数不大于这些数的算术平均数,即 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

提示:采用数学归纳法.

证° 设

$$G_n=(x_1\cdot x_2\cdot\cdots x_n)^{\frac{1}{n}},$$

$$A_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

则有 $$G_n^n=x_1\cdot x_2\cdots x_n,$$

$$nA_n=x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

当 $n=2$ 时,我们已有不等式 $\sqrt{x_1x_2}\leqslant\frac{x_1+x_2}{2}$.

现假设当 $n=k$ 时,有

$$G_k\leqslant A_k.$$

则 $$\begin{aligned}G_{k+1}&=(x_1\cdot x_2\cdots x_k\cdot x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}\\&=[(G_k)^k\cdot x_{k+1}]^{\frac{1}{k+1}}\\&=(G_k)^{\frac{k}{k+1}}\cdot(x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}\\&\leqslant A_k^{\frac{k}{k+1}}\cdot(x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}.\end{aligned}$$

设 $$f(x)=x^{\alpha}-(1-\alpha+\alpha x)\qquad(0<\alpha<1),$$

则 $$f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1).$$

所以,当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$,从而 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上严格增加;当 $1<x<+\infty$ 时,$f'(x)<0$,从而 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格减小.因此,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,

$$f(x)\leqslant f(1)=0.$$

即 $$x^{\alpha}\leqslant1-\alpha+\alpha x.$$

令 $$\alpha=\frac{1}{p},1-\alpha=\frac{1}{q},x=\frac{a}{b}$$

$$\left(a>0,b>0,p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

于是,有

$$a^{\frac{1}{p}}\cdot b^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{a}{p}+\frac{b}{q}$$

$$\left(p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,a>0,b>0\right).$$

令 $$A_k=a,x_{k+1}=b,$$

$$p=\frac{k+1}{k}>1,q=k+1>1,$$

且 $$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=1,$$

所以 $$A_k^{\frac{k}{k+1}}(x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}\leqslant\frac{k}{k+1}A_k+\frac{1}{k+1}x_{k+1}$$
$$=\frac{1}{k+1}(kA_k+x_{k+1})$$
$$=\frac{1}{k+1}(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1})$$
$$=A_{k+1}.$$

从而 $G_{k+1}\leqslant A_{k+1}$,

根据数学归纳法知,对任何自然数 n 有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

【1296】 设 a、b 为正数,则由以下等式

$$\Delta_s(a,b)=\left(\frac{a^s+b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}\qquad(\text{若 } s\neq 0),$$
$$\Delta_0(a,b)=\lim_{s\to 0}\Delta_s(a,b).$$

所定义的函数称作两个正数 a 与 b 的 s 阶平均数. 特别是,当 $s=-1$ 时,得调和平均数,当 $s=0$ 时,得几何平均数(请证明!)当 $s=1$ 时,得算术平均数;当 $s=2$ 时得平方平均数.

证明:(1) $\min(a,b)\leqslant\Delta_s(a,b)\leqslant\max(a,b)$;

(2) 当 $a\neq b$ 时,函数 $\Delta_s(a,b)$ 是变量 s 的递增函数;

(3) $\lim\limits_{s\to-\infty}\Delta_s(a,b)=\min(a,b)$;

$\lim\limits_{s\to+\infty}\Delta_s(a,b)=\max(a,b)$.

提示:研究 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\ln\Delta_s(a,b)]$.

证 我们首先证明 $\Delta_0(a,b)$ 是几何平均数,由题设有

$$\Delta_0(a,b)=\lim_{S\to 0}\Delta_S(a,b)=\lim_{S\to 0}e^{\frac{1}{S}\ln\frac{a^S+b^S}{2}},$$

研究 $f(x)=\ln\dfrac{a^x+b^x}{2}$ 在 $x=0$ 点的导数,有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}.$$

另一方面

$$f'(0)=f'(x)\big|_{x=0}$$
$$=\frac{2}{a^x+b^x}\cdot\frac{1}{2}[a^x\ln a+b^x\ln b]\Big|_{x=0}$$
$$=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b).$$

因此　$\Delta_0(a,b)=\lim\limits_{S\to 0}e^{\frac{1}{S}\ln\frac{a^S+b^S}{2}}=e^{f'(0)}$

$$=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab}.$$

(1) 当 $S>0$ 时，由于

$$2[\min(a,b)]^S\leqslant a^S+b^S\leqslant 2[\max(a,b)]^S,$$

所以　$\min(a,b)\leqslant\left(\frac{a^S+b^S}{2}\right)^{\frac{1}{S}}\leqslant\max(a,b).$

当 $S<0$ 时，由于

$$2[\max(a,b)]^S\leqslant a^S+b^S\leqslant 2[\min(a,b)]^S.$$

所以　$\min(a,b)\leqslant\left(\frac{a^S+b^S}{2}\right)^{\frac{1}{S}}\leqslant\max(a,b).$

因此，我们总有

$$\min(a,b)\leqslant\Delta_S(a,b)\leqslant\max(a,b).$$

(2) $\frac{d}{dS}\ln\Delta_S(a,b)$

$$=-\frac{1}{S^2}\ln\frac{a^S+b^S}{2}+\frac{a^S\ln a+b^S\ln b}{S(a^S+b^S)}$$
$$=\frac{1}{S^2(a^S+b^S)}\left[(a^S\ln a^S+b^S\ln b^S)-(a^S+b^S)\ln\frac{a^S+b^S}{2}\right].$$

由于 $a^S>0,b^S>0$，参看 1314 题(3) 的结果知

$$a^S\ln a^S+b^S\ln b^S>(a^S+b^S)\ln\frac{a^S+b^S}{2}\qquad(a\neq b).$$

所以　$\frac{d}{dS}\ln\Delta_S(a,b)>0,$

即 $\ln\Delta_S(a,b)$ 是严格增大的. 由于 $\ln x$ 是 x 的严格单调增加的函数. 故 $\Delta_S(a,b)$ 是 S 的严格增的函数.

(3) 不妨设 $0<a<b$，于是

$$\lim_{S\to-\infty}\Delta S(a,b)=\lim_{S\to-\infty}\left(\frac{a^S+b^S}{2}\right)^S$$

$$=\lim_{S\to-\infty}a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^S\right)^{\frac{1}{S}}.$$

而当 $S<0$,

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^S<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

故 $$\lim_{S\to-\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^S\right)^{\frac{1}{S}}=1.$$

所以 $$\lim_{S\to-\infty}\Delta S(a,b)=a=\min(a,b),$$

$$\lim_{S\to+\infty}\Delta_S(a,b)=\lim_{S\to+\infty}\left(\frac{a^S+b^S}{2}\right)^{\frac{1}{S}}$$

$$=\lim_{S\to+\infty}b\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^S\right)^{\frac{1}{S}}$$

$$=b=\max(a,b).$$

【1297】 证明下列不等式

(1) 当 $\alpha\geqslant 2, x>1$ 时, $x^\alpha-1>\alpha(x-1)$;

(2) 当 $n>1, x>a>0$ 时, $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{x-a}$;

(3) 当 $x>0$ 时, $1+2\ln x\leqslant x^2$.

证 设 $f(x)=x^\alpha \quad (\alpha\geqslant 2)$.

则 $$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}>\alpha \quad (x>1).$$

由罗尔定理,知存在 $c\in(1,x)$,使得

$$f(x)-f(1)=f'(c)(x-1),$$

即 $$x^\alpha-1=\alpha c^{\alpha-1}(x-1).$$

从而 $$x^\alpha-1>\alpha(x-1).$$

(2) 设 $f(x)=\sqrt[n]{x-a}-\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{a}$.

则 $$f(a)=0, f'(x)=\frac{1}{n}\left[(x-a)^{-\frac{n-1}{n}}-x^{-\frac{n-1}{n}}\right].$$

注意到 $n>1, x>a>0$ 有 $\frac{n-1}{n}>0, x>x-a>0$,

所以 $f'(x)>0$,即当 $x>a$ 时 $f(x)$ 是严格单调增加的.

因此　　$f(x) > f(a) = 0 \quad (x > a)$,

即　　$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$.

(3) 设 $f(x) = x^2 - 2\ln x - 1$.

则　　$$f'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x}.$$

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减小.

当 $1 < x < +\infty$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加.

故当 $x > 0$ 时,

$$f(x) > f(1) = 0.$$

因此　　$x^2 > 2\ln x + 1 \quad (x > 0)$.

§8. 凹凸性. 拐点

1. 凹凸的充分条件　如果曲线

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

的一段位于经过该线段任何点的切线之上(或之下),则称可微分函数 $y = f(x)$ 的图形在闭区间 $[a,b]$ 内是上凹或下凸(下凹或上凸)的. 当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时,假设二阶导数 $f''(x)$ 存在. 当 $a < x < b$ 时,不等式 $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) 的成立,是图形凹(凸)的充分条件.

2. 拐点的充分条件　如果函数图形在某点的凹凸性改变,则称此点为拐点.

若在点 x_0,或是 $f''(x_0) = 0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在,且 $f'(x_0)$ 有意义,如果当 x 变动经过 x_0 时, $f''(x)$ 改变其符号,则 x_0 就是拐点.

【1298】　研究曲线 $y = 1 + \sqrt[3]{x}$ 在点 $A(-1,0)$,点 $B(1,2)$ 和点 $C(0,0)$ 的凹凸方向.

解　$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}.$$

在 $A(-1,0)$ 点, $y'' = \frac{2}{9} > 0$,故在该点附近,曲线的图形是凹的.

在 $B(1,2)$ 点, $y'' = -\frac{2}{9} < 0$,故在该点附近,曲线的图形是凸的.

$C(0,0)$ 点不在曲线上.

求以下函数图形的凹凸区域和拐点(1299 ~ 1301).

【1299】 $y = 3x^2 - x^3$.

解 $y' = 6x - 3x^2, y'' = 6 - 6x$.

当 $-\infty < x < 1$ 时,$y'' > 0$,故图象是凹的.

当 $1 < x < +\infty$ 时,$y'' < 0$,故图象是凸的.

点$(1,2)$ 是拐点.

【1300】 $y = \dfrac{a^2}{a^2 + x^2} \qquad (a > 0)$.

解 $y' = -\dfrac{2a^2 x}{(a^2 + x^2)^2}, y'' = -\dfrac{2a^2(a^2 - 3x^2)}{(a^2 + x^2)^3}$.

当 $|x| < \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 时,$y'' < 0$,故图象是凸的.

当 $|x| > \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 时,$y'' > 0$,故图象是凹的.

$x = \pm \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 是拐点.

【1301】 $y = x + x^{\frac{5}{3}}$.

解 $y' = 1 + \dfrac{5}{3} x^{\frac{2}{3}}, y'' = \dfrac{10}{9} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$.

当 $-\infty < x < 0$ 时,$y'' < 0$,故图象是凸的.

当 $0 < x < +\infty$ 时,$y'' > 0$,故图象是凹的.

$x = 0$ 是拐点.

【1302】 $y = \sqrt{1 + x^2}$.

解 $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, y'' = \dfrac{1}{(1 + x^2)^{3/2}} > 0$.

故在$(-\infty, +\infty)$ 内,图象始终是凹的,无拐点.

【1303】 $y = x + \sin x$.

解 $y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x$.

当 $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$ 时,$y'' < 0$,故图象是凸的.

当$(2k + 1)\pi < x < (2k + 2)\pi$ 时,$y'' > 0$,故图象是凹的.

$x = k\pi$ 是拐点($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$).

【1304】 $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$.

当 $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,$y'' < 0$,故图形是凸的.

当 $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,$y'' > 0$,故图形是凹的.

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是拐点.

【1305】 $y = \ln(1 + x^2)$.

解 $y' = \frac{2x}{1+x^2}, y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

当 $|x| < 1$ 时,$y'' > 0$,故图象是凹的.
当 $|x| > 1$ 时,$y'' < 0$,故图象是凸的.
$x = \pm 1$ 是拐点.

【1306】 $y = x\sin(\ln x) \quad (x > 0)$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$,

$$y'' = \frac{\sqrt{2}}{x}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right).$$

令 $y'' = 0$.

得 $$x = e^{k\pi+\frac{\pi}{2}} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

当 $e^{2k\pi-\frac{3\pi}{4}} < x < e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 时,$y'' > 0$,故图象是凹的.

当 $e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}} < x < e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}$ 时,$y'' < 0$,故图象是凸的.

$x = e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 是拐点.

【1307】 $y = x^x \quad (x > 0)$.

解 $y' = x^x(\ln x + 1)$,

$$y'' = x^x\left[\frac{1}{x} + (\ln x + 1)^2\right].$$

当 $x > 0$ 时,$y'' > 0$,故图象始终是凹的.

【1308】 证明:曲线 $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ 有在同一直线上的三个

拐点.

作此函数的图形.

证 $y' = \dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$,

$$y'' = \frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^2}.$$

令 $y''=0$ 得 $x_1=-2-\sqrt{3}, x_2=-2+\sqrt{3}, x_3=1$,易见它们都是图象的拐点,对应的函数值为

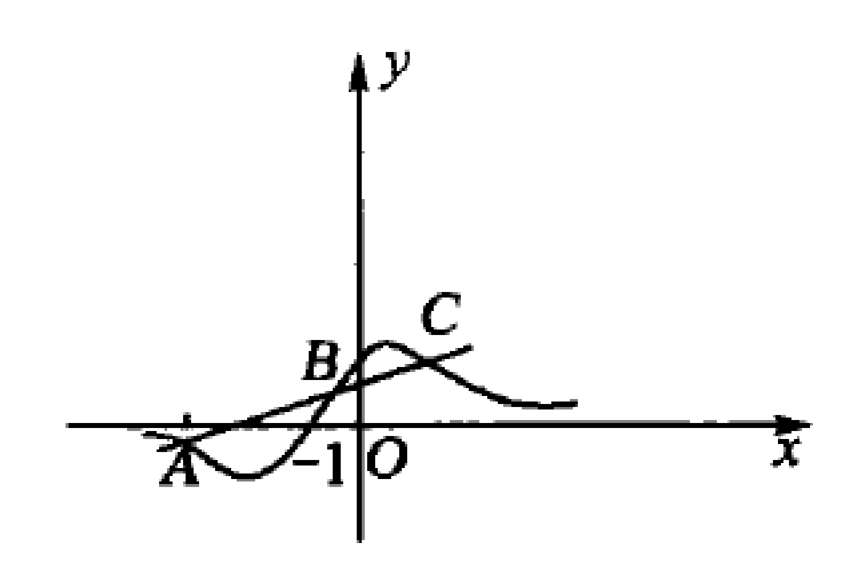
$$y_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}, y_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, y_3 = 1$$

由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ 1 & \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} & \dfrac{1-\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} = 0,$$

所以拐点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$ 在同一条直线上.

如 1308 题图所示



1308 题图

【1309】 应如何选择参数 h,使"概率曲线"$y=\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ $(h>0)$ 有拐点 $x=\pm\sigma$?

解 $y' = \dfrac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$, $y'' = \dfrac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}(4h^4x^2-2h^2)$.

令 $y''=0$ 得 $x^2=\dfrac{1}{2h^2}$.

由于拐点为 $\arctan x = \pm\sigma$，故有 $h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$.

即 $$h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \qquad (\sigma > 0).$$

【1310】 研究摆线

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \qquad (a > 0),$$

的凹凸性.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \cot\frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{\frac{1}{2}\csc^2\frac{t}{2}}{a(1-\cos t)} < 0$$

$$(2k\pi < t < 2(k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

故摆线始终呈凸状.

【1311】 假设函数 $f(x)$ 在区间 $a \leqslant x < +\infty$ 内可微分二次，并且

(1) $f(a) = A > 0$;(2) $f'(a) < 0$;(3) 当 $x > a$ 时 $f''(x) \leqslant 0$.

证明:方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(a, +\infty)$ 内有且仅有一个实根.

证 由于 $f'(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，且当 $a < x < +\infty$ 时，$f''(x) < 0$，故 $f'(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上是减小的，于是当 $x \in [a, +\infty)$ 时 $f'(x) \leqslant f'(a) < 0$. 因此，$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上是严格减小的. 因此在 $[a, +\infty)$ 内至多存在一点 c 使 $f(c) = 0$. 即方程 $f(x) = 0$ 在 $(a, +\infty)$ 内至多有一个根.

下面证明必存在点 $x_0 \in (a, +\infty)$ 使 $f(x_0) = 0$.

设 $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$.

则 $$F'(x) = f'(x) - f'(a), \qquad F''(x) = f''(x) \qquad (a \leqslant x < +\infty).$$

于是当 $a \leqslant x < +\infty$ 时，$F''(x) \leqslant 0$，从而 $F'(x)$ 在 $a \leqslant x < +\infty$ 上是减小的. 所以当 $x \in [a, +\infty)$ 时.

$$F'(x) \leqslant F'(a) = 0.$$

因此，$F(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上是减小的.

所以 $F(x) \leqslant F(a) = 0 \quad (a \leqslant x < +\infty)$.

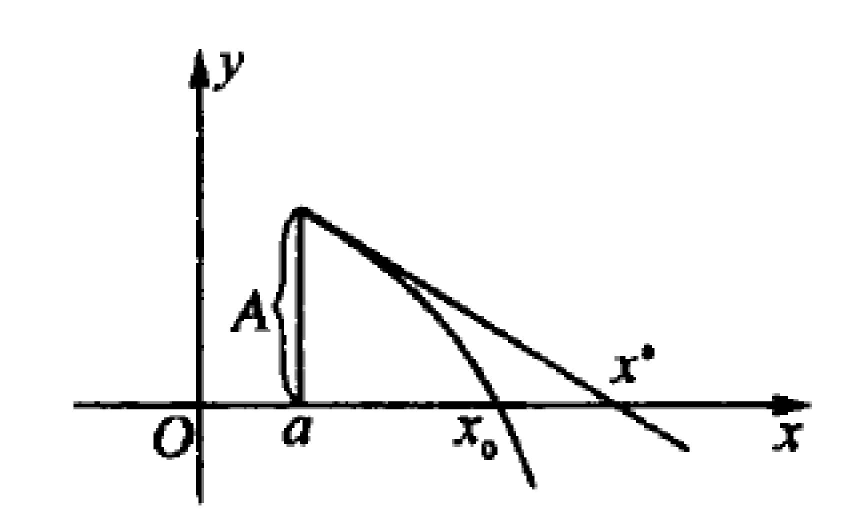
令 $x^* = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

由于 $f(a) > 0, f'(a) < 0$,

故 $x^* > a$,显然

$$F(x^*) = f(x^*) - f(a) - f'(a)\left[-\frac{f(a)}{f'(a)}\right] = f(x^*).$$

而 $F(x^*) \leqslant 0$,故 $f(x^*) \leqslant 0$. 于是连续函数的介值定理,必有 $x_0 \in (a, x^*]$ 使 $f(x_0) = 0$. 如 1311 题图所示



1311 题图

【1312】 如果对于区间 (a,b) 内任何两个点 x_1 与 x_2 和任意两个数 λ_1 与 λ_2($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$) 成立不等式

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

(或对应的相反不等式 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$) 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是凹(凸) 的.

证明:(1) 当 $a < x < b$ 时,如果 $f''(x) > 0$,则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 区间是凹;

(2) 当 $a < x < b$ 时,如果 $f''(x) < 0$,则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸.

证 法一:设 x_1, x_2 为 (a,b) 中任意两点,$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. 不妨设 $x_1 < x_2$. 再设

$$F(t) = f[(1-t)x_1 + tx_2] - (1-t)f(x_1) - tf(x_2) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

显然 $F(0) = f(x_1) - f(x_1) = 0$,

$F(1) = f(x_2) - f(x_2) = 0$.

由中值定理，存在 $c \in (x_1, x_2)$ 使 $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$.

所以，当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时，

$$F'(t) = (x_2 - x_1)f'[(1-t)x_1 + tx_2] - [f(x_2) - f(x_1)]$$
$$= (x_2 - x_1)\{f'[(1-t)x_1 + tx_2] - f'(c)\}.$$

令 $t_0 = \dfrac{c - x_1}{x_2 - x_1}$,

则 $0 < t_0 < 1$,

且 $c = (1-t_0)x_1 + t_0 x_2$.

于是 $F'(t_0) = 0$.

而 $F''(t) = (x_2 - x_1)^2 f''[(1-t)x_1 + tx_2] \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$.

(1) 若 $f''(x) > 0 \quad (a < x < b)$.

则由上式知 $F''(t) > 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$,

故 $F'(t)$ 在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上是严格增大的.

由 $F'(t_0) = 0$，当 $0 \leqslant t < t_0$ 时，$F'(t) < 0$;

当 $t_0 < t \leqslant 1$ 时，$F'(t) > 0$.

所以在 $[0, t_0]$ 上，$F(t)$ 是严格减小的，在 $[t_0, 1]$ 上，$F(t)$ 是严格增大的.

故当 $0 < t \leqslant t_0$ 时 $F(t) < F(0) = 0$.

当 $t_0 \leqslant t < 1$ 时 $F(t) < F(1) = 0$.

因此，当 $0 < t < 1$ 时，恒有 $F(t) < 0$. 特别地

$$F(\lambda_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 f(x_1) - \lambda_2 f(x_2) < 0.$$

故 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$.

因此，$f(x)$ 在 (a,b) 上的凹的.

(2) 若 $f''(x) < 0 (a < x < b)$，则 $F''(t) < 0 (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 与(1)完全类似地可推知：当 $0 < t < 1$ 时，恒有 $F(t) > 0$，特别地 $F(\lambda_2) > 0$. 从而

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

故 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸的.

法二：设 x_1, x_2 为 (a,b) 中任意两点，且 $x_1 < x_2$，令

$$c=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\qquad(\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_1+\lambda_2=1),$$

则 $\qquad x_1<c<x_2.$

根据 1266 题的证明,可得

$$f(x)=f(c)+(x-c)f'(c)+\frac{1}{2}(x-c)^2f''(\xi),$$

其中 ξ 位于 x 与 c 之间,$(x_1\leqslant x\leqslant x_2)$. 从而

$$f(x_1)=f(c)+(x_1-c)f'(c)+\frac{1}{2}(x_1-c)^2f''(\xi_1),\tag{①}$$

$$f(x_2)=f(c)+(x_2-c)f'(c)+\frac{1}{2}(x_2-c)^2f''(\xi_2),\tag{②}$$

其中 $\qquad a<x_1<\xi_1<c,c<\xi_2<x_2<b,$

λ_1 乘以 ① 式加上 λ_2 乘以 ② 式得

$$\begin{aligned}&\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)\\&=(\lambda_1+\lambda_2)f(c)+[\lambda_1x_1+\lambda_2x_2-(\lambda_1+\lambda_2)c]f'(c)\\&\quad+\frac{1}{2}[\lambda_1(x_1-c)^2f''(\xi_1)+\lambda_2(x_2-c)^2f''(\xi_2)].\end{aligned}$$

由 $\qquad c=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,\lambda_1+\lambda_2=1,$

有

$$\begin{aligned}&\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)\\&=f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\\&\quad+\frac{1}{2}[\lambda_1(x-c)^2f''(\xi_1)+\lambda_2(x-c)^2f''(\xi_2)],\end{aligned}$$

当 $f''(x)>0$ 时,有

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),$$

即 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹的.

当 $f''(x)<0$ 时,有

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),$$

即 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸的.

【1313】 证明:函数 $x^n(n>1)$,e^x,$x\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是凹的,而函数 $x^n(0<n<1)$,$\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是凸的.

解 (1) 设 $y=x^n\qquad(n>1)$

则　　$y' = nx^{n-1}, y'' = n(n-1)x^{n-2} > 0 \quad (0 < x < +\infty).$
所以 $y = x^n$ 在$(0,\infty)$ 上是凹的.

若 $0 < n < 1$,则显然

$$y'' = n(n-1)x^{n-2} < 0 \qquad (0 < x < +\infty).$$

故函数在$(0,+\infty)$ 是凸的.

(2) $(e^x)'' = e^x > 0$. 所以 $y = e^x$ 的图象始终是凹的.

(3) 设 $y = x\ln x$.

则　　$y' = \ln x + 1, y'' = \dfrac{1}{x}.$

当 $0 < x < +\infty$ 时,$y'' > 0$,故图象是凹的.

(4) $(\ln x)'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0.$

因此,$y = \ln x$ 的图象在$(0,+\infty)$ 内是凸的.

【1314】 证明以下不等式,并解释它们的几何意义:

(1) $\dfrac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$

$$(x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1);$$

(2) $\dfrac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \qquad (x \neq y);$

(3) $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$,若 $x > 0$ 和 $y > 0$.

证　由1312题的结果知,若 $f(x)$ 的图象在(a,b) 内是凹的,则对于(a,b) 中的任意不同的两点 x 和 y 有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x) + f(y)].$$

(在1312题中取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$).

(1) $f(x) = x^n (n > 1)$ 在$(0,+\infty)$ 内是凹的,所以对于 $x > 0, y > 0, x \neq y$ 有

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(2) $f(x) = e^x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内是凹的,所以对任意 x, y,$(x$

$\neq y$) 有

$$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}.$$

(3) $f(x)=x\ln x$ 在$(0,+\infty)$内是凸的.
故对于 $x,y\in(0,+\infty)$，$x\neq y$，有

$$\frac{x\ln x+y\ln y}{2}>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2},$$

即 $$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

它们的几何意义：联接点$(x,f(x))$与点$(y,f(y))$的弦的中点始终位于由线 $y=f(x)$ 上对应点(具相同横坐标)的上方.

【1314.1】 设：当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$f''(x)\geqslant 0$，证明：对任意的 $x_1x_2\in[a,b]$，$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$.

证 在 1312 题的证明中取 $\lambda_1=\frac{1}{2}$，$\lambda_2=\frac{1}{2}$，立得.

【1315】 证明：有界的凸函数处处都是连续的，且具有单侧的左或右导数.

证 设 $f(x)$ 在(a,b)内是凸的，$x_0\in(a,b)$ 取 x_0 的一邻域 $N_{\delta_0}(x_0)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$，使得

$$N_{\delta_0}(x_0)\subset(a,b),$$

记 $$M=\min\{f(x_0-\delta_0),f(x_0+\delta_0)\}.$$

设 $x\in N_{\delta_0}(x_0)$，

$$t=\frac{|x-x_0|}{\delta_0},$$

则 $0<t<1$.

当 $x_0<x<x_0+\delta_0$ 时，有

$$x=t(x_0+\delta_0)+(1-t)x_0,$$

及 $$x_0=\frac{1}{1+t}x+\frac{t}{1+t}(x_0-\delta_0).$$

由于 $f(x)$ 为凸函数，故有

$$f(x)>tf(x_0+\delta_0)+(1-t)f(x_0)$$

$$\geqslant tM+(1-t)f(x_0), \qquad ①$$

$$f(x_0)>\frac{1}{1+t}f(x)+\frac{t}{1+t}f(x_0-\delta_0)$$

$$\geqslant\frac{f(x)+tM}{1+t}. \qquad ②$$

由 ① 得

$$f(x)-f(x_0)>-t[f(x_0)-M].$$

由 ② 得

$$t[f(x_0)-M]>f(x)-f(x_0).$$

从而　$f(x_0)-M>0$,

且　$|f(x)-f(x_0)|<t[f(x_0)-M]$

$$=\frac{f(x_0)-M}{\delta_0}|x-x_0|. \qquad ③$$

当 $x_0-\delta_0<x<x_0$ 时,类似地可导出 ③

这说明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,

也就是凸函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

记　$x=x_0+h$.

则 ③ 式可改写为

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|<\frac{|f(x_0)-M|}{\delta_0}.$$

设　$\varphi(h)=f(x_0+h)-f(x_0)\qquad(-\delta_0<h<\delta_0)$.

则 $\varphi(h)$ 为凸函数,事实上

$$\varphi(\lambda_1h_1+\lambda_2h_2)$$

$$=f(x_0+\lambda_1h_1+\lambda_2h_2)-f(x_0)$$

$$=f[\lambda_1(x_0+h_1)+\lambda_2(x_0+h_2)]-f(x_0)$$

$$>\lambda_1f(x_0+h_1)+\lambda_2f(x_0+h)-\lambda_1f(x_0)-\lambda_2f(x_0)$$

$$=\lambda_1\varphi(h_1)+\lambda_2\varphi(h_2),$$

其中 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_1+\lambda_2=1$.

又 $\varphi(0)=0$,取 $t_1,t_2\in(0,\delta_0)$,并设 $t_1<t_2$,则有

$$t_1=\frac{t_1}{t_2}\cdot t_2+\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)\cdot 0.$$

于是 $\varphi(t_1) > \frac{t_1}{t_2}\varphi(t_2) + \left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)\varphi(0) = \frac{t_1}{t_2}\varphi(t_2)$,

即 $\frac{\varphi(t_1)}{t_1} > \frac{\varphi(t_2)}{t_2}$.

所以 $F(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$ 在$(0,\delta_0)$是单调递减且有界的函数. 故$\lim\limits_{h\to+0}F(t)$ 存在. 即 $f(x)$ 在 x_0 的右导数

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

存在. 同理 $f'_-(x_0)$ 存在.

注:本题不需 $f(x)$ 有界的条件. 若以较弱的不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) \qquad (x_1 \neq x_2),$$

作凸函数的定义,则需加上凸函数有界的条件才能推出本题的结论.

【1316】 假设函数 $f(x)$ 在区间(a,b)可二次微分,且 $f''(\xi) \neq 0$,其中 $a<\xi<b$.

证明:在区间(a,b)中可求得两个值 x_1 和 x_2,使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi).$$

证 不妨设 $f''(\xi)>0$,考察 $f'(\xi)$,分两种情况讨论:

(1) $f'(\xi)=0$,则由 $f''(\xi)>0$,知 $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 的极小值,从而存在 $\delta>0$,使得$[-\delta+\xi,\xi+\delta]\subset(a,b)$,且当 $x\in[\xi-\delta,\xi+\delta]$ 时 $f(x)\geqslant f(\xi)$. 如果 $f(\xi-\delta)=f(\xi+\delta)$,则取 $x_1=\xi-\delta$, $x_2=\xi+\delta$,即合要求.

如果 $f(\xi-\delta)<f(\xi+\delta)$,取 $x_1=\xi-\delta$,而 $f(\xi)<f(\xi-\delta)<f(\xi+\delta)$,由连续函数的介值定理有,存在 $x_2\in(\xi,\xi+\delta)$ 使得

$$f(x_2)=f(x_1).$$

从而有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0 = f'(\xi)$.

如果 $f(\xi-\delta)>f(\xi+\delta)$,类似地证明可得结论.

(2) 若 $f'(\xi)\neq 0$,则设

$$F(x)=f(x)-f'(\xi)x.$$

从而有　$F'(\xi)=0, F''(\xi)=f''(\xi)>0.$

对于函数 $F(x)$，由(1) 的证明知存在 $x_1, x_2\in(a,b)$，使

$$F(x_1)=F(x_2),$$

即　$$f(x_1)-f'(\xi)x_1=f(x_2)-f'(\xi)x_2.$$

因此　$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

【1317】 证明：如果函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(x_0,+\infty)$ 内可二次微分二次，且

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=0, \lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

则在区间 $(x_0,+\infty)$ 内至少存在一个 ξ 点，使得 $f''(\xi)=0.$

证　反设不存在 $\xi\in(x_0,+\infty)$ 使 $f''(\xi)=0$，则当 $x>x_0$ 时，或者 $f''(x)>0$，或者 $f''(x)<0$，否则，存在 $a,b\in(x_0,+\infty)$，使得 $f''(a)<0, f''(b)>0$，不妨设 $a<b$. 则存在 δ_1，使得当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，$f'(x)<f'(a)$，及存在 δ_2，使得当 $x\in(b-\delta_2,b)$ 时

$$f'(x)<f'(b).$$

因此，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值必在 (a,b) 内某点 c 取到，即 c 为 $f'(x)$ 的极小值，从而 $f''(c)=0$. 这与我们的假设相矛盾.

因此，我们不妨设 $f''(x)>0$，从而函数 $f(x)$ 的图象是凹的，位于其任一点的切线的上方. 再由

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=0, \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

及 $f(x)$ 的可微性，由 1237 题的结果知，存在一点 $c_1\in(x_0,+\infty)$ 使

$$f'(c_1)=0,$$

再由 $f''(x)>0$，知 $f''(x)$ 单调增大. 从而当 $x>c_1$ 时，$f'(x)>0$，取 $c_2>c_1$. 则

$$f'(c_2)>0,$$

过 $(c_2,f(c_2))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，其方程为

$$y(x)=f(c_2)+f'(c_2)(x-c_2).$$

显然　$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=+\infty.$$

而 $f(x)-y(x)>0$,

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

这与题设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 矛盾. 同理,若 $f''(x)<0$ 也可得出同样的矛盾. 因此,至少存在一点 $\xi\in(x_0,+\infty)$,使 $f''(\xi)=0$.

§9. 未定形的求值

洛必达第一法则(未定形 $\frac{0}{0}$ 的求值法) 如果:

(1) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 a 的某邻域 u_ε[①] 内有定义并且是连续的(此处 a 为数字或符号 ∞),且当 $x\to a$ 时,两函数都趋向于零:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0.$$

(2) 在点 a 的邻域 u_ε 内,除 a 点本身外,在其余各点存在导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$,并且当 $x\neq a$ 时,两导数不同时为零;

(3) 存在有穷或无穷极限值 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,则:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

洛必达第二法则(未定形 $\frac{\infty}{\infty}$ 的求值法).

如果:

(1) 在 $x\to a$ 时,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都趋于无穷大:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty.$$

其中 a 为数或符号 ∞;

(2) 对于属于点 a 的某个邻域 u_ε 且不等于 a 的一切 x 值,存在导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$,并且当 $x\in u_\varepsilon$ 及 $x\neq a$ 时,

---

① 所谓点 a 的邻域 u_ε,是指满足不等式

(1) $0<|x-a|<\varepsilon$,如果 a 是一个数

(2) $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$,如果 a 是符号 ∞.

的 x 的集合

$$f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0.$$

(3) 存在有穷或无穷极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

对单侧极限来说,有类似的法则.

运用代数变换和取对数的方法，能使未定形 $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0 等等的求值法简化为前面两个主要类型的未定形：$\dfrac{0}{0}$ 与$\dfrac{\infty}{\infty}$ 的求值法.

求出以下各式的值(1318 ~ 1370).

【1318】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax}{b\cos bx}=\dfrac{a}{b}\qquad(b\neq 0).$

【1319】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}x+\cos x}{2}=1.$$

【1320】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2.$$

【1321】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\tan 4x-12\tan x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\tan 4x-12\tan x}{3\sin 4x-12\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{12\sec^2 4x - 12\sec^2 x}{12\cos 4x - 12\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 4x}{\cos^2 x \cdot \cos^2 4x(\cos 4x - \cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-(\cos 4x + \cos x)}{\cos^2 x\cos^2 4x} = -2.$$

【1322】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 3x}{\tan x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 3x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\sin 3x}{\sin x} \cdot \dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x}$$

$$= -1 \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-3\sin 3x}$$

$$= (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

【1323】 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cot x - 1}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cot x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \tan x}{x^2 \cdot \tan x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sec^2 x}{2x\tan x + x^2 \sec^2 x}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\tan x^2}{2x\tan x + x^2 + x^2\tan^2 x}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2 + 2\dfrac{x}{\tan x} + \left(\dfrac{x}{\tan x}\right)^2} = -\frac{1}{3}.$$

【1324】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2\sin^2 x - 1} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\tan^2 x}} \cdot \sec^2 x}{4\sin x\cos x} = \dfrac{1}{3}.$

【1325】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+1+xe^x-2e^x}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+xe^x-e^x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x+e^x-e^x}{6x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{6}=\dfrac{1}{6}$.

【1326】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

解 令 $t=x^2$,则

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t\sin t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{\sin t+t\cos t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos t}{\cos t+\cos t-t\sin t}=\frac{1}{2}.$$

【1327】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-4x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-4x^2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{3x^2}$$

$$=2\cdot\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}}}{6x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{4}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 3=1.$$

【1328】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\arctan\sqrt{\frac{x}{b}}\right).$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\arctan\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{a}}{1+\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{b}}{1+\frac{x}{b}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{b}\cdot\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{x+a}-\frac{b}{x+b}}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{a}{(x+a)^2}+\frac{b}{(x+b)^2}}{3}$$

$$=\frac{a-b}{3ab}\qquad(ab\neq 0).$$

【1329】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}\qquad(a>0).$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-a^{\sin x}\cos x)\ln a}{3x^2}$$

$$=\frac{\ln a}{3}\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-a^{\sin x}\cdot\cos^2 x\cdot\ln a+\sin x a^{\sin x}}{2x}$$

$$=\frac{\ln a}{3}\left[\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-a^{\sin x}\cos^2 x)\cdot\ln a}{2x}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{a^{\sin x}}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{\ln a}{3}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln a}{2}\cdot\frac{a^x\ln a-\cos^3 x a^{\sin x}\ln a+2\sin x\cos x a^{\sin x}}{1}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{\ln a}{6}\qquad(a>0).$$

【1330】 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}\right).$

解 $$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{\frac{1}{x}-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}}=-2.$$

【1331】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}=\lim_{x\to0}\frac{a\cdot\frac{\cos ax}{\sin ax}}{b\cdot\frac{\cos bx}{\sin bx}}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\cos ax}{\cos bx}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin bx}{\sin ax}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$$

【1332】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}=\lim_{x\to0}\frac{-a\cdot\frac{\sin ax}{\cos ax}}{-b\cdot\frac{\sin bx}{\cos bx}}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\cos bx}{\cos ax}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^2\qquad(b\neq0).$$

【1333】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin(\sin x)\cdot\cos x+\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\sin(\sin x)-\cos^2x\cdot\cos(\sin x)+\cos x}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{24x}[\cos x\cdot\sin(\sin x)+\sin x\cos x\cdot\cos(\sin x)$$

$$+2\sin x\cos x\cdot\cos(\sin x)+\cos^3 x\cdot\sin(\sin x)-\sin x]$$

$$=\frac{1}{24}[1+1+2+1-1]^{*}=\frac{1}{6}.$$

* 利用 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$

及 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=1$

【1334】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\text{th}x}-\frac{1}{\tan x}\right).$

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\text{th}x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\text{ch}x-\cos x\text{sh}x}{x\sin x\text{sh}x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x\text{ch}x+\sin x\text{sh}x+\sin x\text{sh}x-\cos x\text{ch}x}{\sin x\text{sh}x+x\cos x\text{sh}x+x\sin x\text{ch}x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x\text{sh}x+2\sin x\text{ch}x}{2(\cos x\text{sh}x+\sin x\text{ch}x+x\cos x\text{ch}x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cdot\frac{\text{sh}x}{x}+\frac{\sin x}{x}\cdot\text{ch}x}{\cos x\cdot\frac{\text{sh}x}{x}+\frac{\sin x}{x}\cdot\text{ch}x+\cos x\cdot\text{ch}x}$$

$$=\frac{2}{3}^{*}.$$

* 利用 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to0}\frac{\text{sh}x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\text{ch}x=1.$

【1335】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\text{arsh}(\text{sh}x)-\text{arsh}(\sin x)}{\text{sh}x-\sin x}$

其中 $\text{arsh}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\text{arsh}(\text{sh}x)-\text{arsh}(\sin x)}{\text{sh}x-\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\text{sh}x+\text{ch}x)-\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})}{\text{sh}x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\text{ch}x+\text{sh}x}{\text{sh}x+\text{ch}x}-\dfrac{\cos x+\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}}}{\text{ch}x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{\operatorname{ch}x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{-\sin x\cdot\sqrt{1+\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{1+\sin^2 x}}{\operatorname{sh}x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\sin x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}}{\operatorname{sh}x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{sh}x+\sin x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\operatorname{ch}x+\cos x}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

【1336】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}}\qquad(\varepsilon>0).$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}}=0.$

【1337】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}\qquad(a>0,n>0).$

解 若 n 为正整数，则连续运用 n 次洛必达法则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{ne^{ax}}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{a^n e^{ax}}=0.$$

若 n 不是正整数，则

$$[n]<n<[n]+1.$$

于是 $\dfrac{x^{[n]}}{e^{ax}}<\dfrac{x^n}{e^{ax}}<\dfrac{x^{[n]+1}}{e^{ax}}\qquad(x>1),$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{[n]}}{e^{ax}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{[n]+1}}{e^{ax}}=0,$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}=0\qquad(n>0,a>0).$

【1338】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}.$

解 令 $t=\frac{1}{x^2}$,则当 $x\to0$ 时,$t\to+\infty$,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}=0.$$

【1339】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0.01x}$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{-0.01x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{0.01x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{0.01e^{0.01x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(0.01)^2e^{0.01x}}=0.$$

【1340】 $\lim\limits_{x\to1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$.

解 $$\lim_{x\to1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to1-0}\frac{\frac{-1}{1-x}}{-\frac{1}{\ln^2x}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{x\cdot\ln^2x}{1-x}=\lim_{x\to1-0}\frac{\ln^2x+2\ln x}{-1}=0.$$

【1341】 $\lim\limits_{x\to+0}x^\varepsilon\ln x \quad (\varepsilon>0)$.

解 $$\lim_{x\to+0}x^\varepsilon\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^\varepsilon}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon\cdot\frac{1}{x^{\varepsilon+1}}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{x^\varepsilon}{-\varepsilon}=0.$$

【1342】 $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

解 $$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}(-x)}$$

$$=e^0=1.$$

【1343】 $\lim\limits_{x\to0}x^{x^x-1}$.

解 $$\lim_{x\to+0}x^{(x^x-1)}=\lim_{x\to+0}e^{(x^x-1)\ln x}=\lim_{x\to+0}e^{(e^{x\ln x}-1)\cdot\ln x}$$

而由 1341 题的结果知：

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = 0,$$

所以 $$\lim_{x\to+0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} = 1,$$

$$\lim_{x\to+0} x\ln^2 x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+0}(-2x\ln x) = 0,$$

故 $$\lim_{x\to+0}(e^{x\ln x}-1)\ln x = \lim_{x\to+0}\left\{\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot x\ln^2 x\right\}$$

$$= 1\cdot 0 = 0,$$

因此 $$\lim_{x\to+0} x^{(x^x-1)} = \lim_{x\to+0} e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x} = e^0 = 1.$$

【1344】 $\lim\limits_{x\to 0}(x^{x^x}-1)$.

解 $$\lim_{x\to+0}(x^{x^x}-1) = \lim_{x\to+0}(e^{x^x\ln x}-1).$$

而由 1342 题结果知

$$\lim_{x\to+0} x^x = 1,$$

故 $$\lim_{x\to+0} e^{x^x\ln x} = 0,$$

因此 $$\lim_{x\to+0}(x^{x^x}-1) = -1.$$

【1345】 $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{k}{(1+\ln x)}}$.

解 因为 $$\lim_{x\to+0}\frac{k}{1+\ln x}\cdot\ln x = \lim_{x\to+0} k\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = k,$$

所以 $$\lim_{x\to+0} x^{\frac{k}{1+\ln x}} = e^k.$$

【1346】 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{(1-x)}}$.

解 因为 $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$.

【1347】 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\tan\frac{\pi x}{2}\cdot\ln(2-x)$

$$=\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\ln(2-x)}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{2-x}}{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

【1348】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

解 因为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\cdot\ln(\tan x)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\sin x-\ln\cos x}{\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}}{-2\cdot\sin 2x}=-1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\tan 2x\cdot\ln\tan x}=e^{-1}$.

【1349】 $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x)^{\sin x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln(\cot x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cot x)}{\csc x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\operatorname{scs}^2 x}{\cot x}}{-\csc x\cdot\cot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x)^{\sin x} = e^0 = 1.$

【1350】 $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x.$

解 因为 $\lim\limits_{x\to +0}x\cdot\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to +\infty}\frac{\ln\ln t}{t} = \lim\limits_{t\to +\infty}\frac{1}{t\ln t} = 0,$

所以 $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1.$

【1351】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}.$

解 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{(2x+1)^2}}{\tan\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\pi\cdot\frac{1}{(2x+1)^2}}{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}$$

$$= 2\pi\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{4}{(2x+1)^3}}{\frac{2\pi}{(2x+1)^2}\cdot\cos\frac{2\pi x}{2x+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-4}{(2x+1)\cos\frac{2\pi x}{2x+1}} = 0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

【1352】 $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\tan x}{\tan a}\right)^{\cot(x-a)}.$

解 因为 $\lim\limits_{x\to a}\cot(x-a)\ln\left(\frac{\tan x}{\tan a}\right)$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\ln\tan x - \ln\tan a}{\tan(x-a)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{\sec^2(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cos^2(x-a)}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2a}\ \left(a\neq\frac{k\pi}{2},k=0,\pm1,\cdots\right),$$

所以 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\tan x}{\tan a}\right)^{\cot(x-a)}=e^{\frac{2}{\sin 2a}}\quad\left(a\neq\dfrac{k\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$

【1353】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a^x-x\ln a)-\ln(b^x-x\ln b)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(a^x-1)\ln a}{a^x-x\ln a}-\dfrac{(b^x-1)\ln b}{b^x-x\ln b}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left[\frac{a^x\ln^2 a(a^x-x\ln a)-(a^x-1)^2\ln^2 a}{(a^x-x\ln a)^2}-\frac{b^x\ln^2 b(b^x-x\ln b)-(b^x-1)^2\ln^2 b}{(b^x-x\ln b)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\ln^2 a-\ln^2 b),$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a-\ln^2 b)}.$

【1354】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right).$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$$

【1355】 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right).$

解 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$$

【1356】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

【1357】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

解 $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x)\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{1}{1+x}\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ln(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+(1+x)\ln(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1}{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})+1+\ln(1+x)}$$
$$=-\frac{1}{2}.$$

【1358】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}\qquad(a>0)$.

解 $$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim_{x\to a}[a^x\ln a-ax^{a-1}]=a^a(\ln a-1).$$

【1359】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=e\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2}=-\frac{e}{2}.$$

【1360】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}\qquad(a>0).$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x\left[\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right]-a^x\ln a}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left\{(a+x)^x\left[\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right]^2\right.$$

$$\left.+(a+x)^x\left[\frac{1}{a+x}+\frac{a}{(a+x)^2}\right]-a^x\ln^2 a\right\}$$

$$=\frac{1}{a}.$$

【1361】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x.$

解 因为

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\arctan x}$$

$$=-\frac{2}{\pi},$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}$.

【1362】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\text{th}x)^x$.

解 因为

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(\text{th}x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\text{th}x)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\text{th}x\cdot\text{ch}^2x}}{-\frac{1}{x}} = -2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\text{sh}2x}$$

$$= -2\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2\text{ch}2x} = -2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\text{sh}2x} = 0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\text{th}x)^x = e^0 = 1$.

【1363】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\arcsin x-\ln x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{2x^2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{\left(4x\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\arcsin x+2x^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{2(2-3x^2)\arcsin x+2x\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-12x\arcsin x+\frac{2(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}+2\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\frac{1}{6},$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{6}}.$

【1363.1】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{4x\sin x+2x^2\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\sin x}{x}}{4\frac{\sin x}{x}+2\cos x}=-\frac{1}{6}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$

【1363.2】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2},$$

从而 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}.$

因此，由 1363.1 题有

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=e^{-\frac{1}{6}}\cdot e^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

【1363.3】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\arctan x}{x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\arctan x-\ln x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x^2)\arctan x}{2x^2(1+x^2)\arctan x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-1-2x\arctan x}{(4x+8x^3)\arctan x+2x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\arctan x}{(2+4x^2)\arctan x+x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{8x\arctan x+\frac{2+4x^2}{1+x^2}+1}=-\frac{1}{3}.$$

因此　$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{3}}.$

【1363.4】　$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{arsh}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

其中 $\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解　因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{arsh}x}{x}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))-\ln x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2+1}$$

$$=-\frac{1}{6}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arsh}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

【1364】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

【1365】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}=-\frac{2}{\pi},$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

【1366】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x-\ln\mathrm{ch}x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\tan x-\mathrm{th}x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sec^2x-\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}}{2}=-1.$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-1}$.

【1367】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\mathrm{ch}x}{\sqrt[m]{\mathrm{ch}x}-\sqrt[n]{\mathrm{ch}x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\mathrm{ch}x}{\sqrt[m]{\mathrm{ch}x}-\sqrt[n]{\mathrm{ch}x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}}{\mathrm{sh}x\left[\frac{1}{m}(\mathrm{ch}x)^{\frac{1}{m}-1}-\frac{1}{n}(\mathrm{ch}x)^{\frac{1}{n}-1}\right]}=\frac{1}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{mn}{n-m}\qquad(n\neq m).$$

【1368】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\mathrm{cth}x}$.

解 因为

$$\lim_{x\to0}\mathrm{cth}x\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+e^x)-\ln2}{\mathrm{th}x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}}=\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\mathrm{cth}\,x}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

【1368.1】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

解 令 $\ln x=t$.

则当 $x\to+\infty$ 时, $t\to+\infty$,

且 $$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t\ln t}=0,$$

所以 $$\lim_{t\to+\infty}(e^t\ln t-t^2)=+\infty,$$

故 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\ln^2 x}}{e^{x\ln(\ln x)}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{t^2}}{e^{e^t\ln t}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{(e^t\ln t-t^2)}}=0.$$

【1369】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right]$$

$$+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\ln(1+xe^{-x}),$$

而 $$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+xe^{-x})=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=1,$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{\sqrt[3]{1+t+t^2+t^3}-\sqrt{1+t+t^2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to+0}\left[\frac{1+2t+3t^2}{3\sqrt[3]{(1+t+t^2+t^3)^2}} - \frac{1+2t}{2\sqrt{1+t+t^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

【1370】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$.

解 令 $t=\dfrac{1}{x}$,则当 $x\to+\infty$ 时 $t\to+0$,

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{1+\frac{1}{x}}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}}\right]$$

$$= \lim_{t\to+0}\frac{(1+at)^{1+t} - t^{\frac{at^2}{1+at}}}{t^{1+t}},$$

又 $\lim\limits_{t\to+0} t\ln t = 0$,

所以 $\lim\limits_{t\to+0} t^t = 1$,

$$\lim_{t\to+0}(1+at)^{1+t} = 1, \lim_{t\to+0} t^{\frac{at^2}{1+at}} = 1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$

$$= \lim_{t\to+0}\frac{(1+at)^{1+t} - t^{\frac{at^2}{1+at}}}{t}\cdot\lim_{t\to+0}\frac{1}{t^t}$$

$$= \lim_{t\to+0}\left\{(1+at)^{1+t}\left[\ln(1+at) + \frac{a(1+t)}{1+at}\right]\right.$$

$$\left. - t^{\frac{at^2}{1+at}}\left[\frac{at}{1+at} + \frac{2at+a^2t^2}{(1+at)^2}\ln t\right]\right\}$$

$$= a.$$

【1371】 当 $x\to 0$ 时,如果曲线 $y=f(x)$ 成 α 角进入坐标原点(0,0)$\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0\right]$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \tan\alpha.$

【1372】 当 $x\to+0$ 时,如果连续曲线 $y=f(x)$ 进入坐标原

点(0,0)$[\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0]$,且当 $0<x<\varepsilon$ 时,此曲线完全在两条直线 $y=-kx$ 与 $y=kx(k\neq\infty)$ 所形成的锐角之内,证明:

$$\lim_{x\to+0}x^{f(x)}=1.$$

证 根据题设有

$$-kx\leqslant f(x)\leqslant kx\qquad(0<x<\varepsilon,k>0).$$

而当 $0<x<1$ 时有 $\ln x<0$,故

$$kx\ln x\leqslant f(x)\ln x\leqslant -kx\ln x.$$

从而 $$e^{kx\ln x}\leqslant e^{f(x)\ln x}=x^{f(x)}\leqslant e^{-kx\ln x},$$

又 $$\lim_{x\to+0}x\ln x=0,$$

所以 $$\lim_{x\to+0}e^{kx\ln x}=\lim_{x\to+0}e^{-kx\ln x}=e^0=1,$$

因此 $$\lim_{x\to+0}x^{f(x)}=1.$$

【1373】 证明:如果函数 $f(x)$ 存在二阶导数 $f''(x)$,则

$$f''(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

证 因为 $\lim\limits_{h\to0}[f(x+h)+f(x-h)-2f(x)]=0$

运用洛必达法则,有

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\left(\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right)$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).$$

【1373.1】 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}, & 若\ x\neq0,\\ \dfrac{1}{2}, & 若\ x=0.\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的可微分性.

解　因为

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}=f(0).$$

所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续.

又
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)-\frac{1}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(e^x-1-x)-x(e^x-1)}{2x^2(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-xe^x}{4x(e^x-1)+2x^2e^x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-xe^x}{4(e^x-1)+8xe^x+2x^2e^x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-e^x-xe^x}{12e^x+12xe^x+2x^2e^x}=-\frac{1}{12},$$

所以
$$f'(0)=-\frac{1}{12}.$$

【1373.2】　求出曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$ 的渐近线.

解　因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{(1+x^x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{e},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(y-\frac{1}{e}x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{x^x}{(1+x)^x}-\frac{1}{e}\right]=\lim_{t\to+0}\frac{\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}}-\frac{1}{e}}{t}$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}} \frac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t^2(1+t)}$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}(1+t)} \cdot \lim_{t \to +0} \frac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{t \to +0} \frac{\ln(1+t)}{2t} = \frac{1}{2e},$$

因此,曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} \quad (x > 0)$ 的渐近线为 $y = \frac{1}{e}\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

【1374】 研究将洛必达法则用于以下各例的可能性:

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$; (2) $\lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$;

(3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)}$;

(4) $\lim_{x \to \infty} \frac{1 + x + \sin x\cos x}{(x + \sin x\cos x)e^{\sin x}}$.

解 (1) 因为

$$\frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

而 $\lim_{x \to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在,所以洛必达法则不适用.事实上,原极根是存在的:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 1 \times 0 = 0.$$

(2) 因为

$$\frac{(x - \sin x)'}{(x + \sin x)'} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x},$$

而 $\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ 不存在,所以,洛必达法则不适用.

事实上,原极限是存在的:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1.$$

(3) 如果运用洛必达法则，就有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5e^{-2x}\sin x-2xe^{-x^2}\sin^2 x+e^{-x^2}\sin 2x}{-2e^{-x}\sin x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{2}e^{-x}+xe^{-x^2+x}\sin x-e^{-x^2+x}\cos x\right)=0.$$

这个结果是错误的，事实上，若取 $x_n=n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$，而原式的分母在 x_n 的值为 $e^{-x_n}(\cos x_n+\sin x_n)=0$. 而分子不为 0，所以原式的极限不存在. 原因是在求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时，虽然 $f(x)$ 及 $g(x)$ 均连续且极限为零. 但 $f'(n\pi)=g'(n\pi)=0$，不符合运用洛必达法则的条件. 另一方面也不允许在求极限的过程中，用 $\sin x$ 作除数，分子、分母约分后再求极限.

(4) 设 $f(x)=1+x+\sin x\cos x$.

$g(x)=(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}$.

则 $f'(x)=1+\cos 2x$,

$g'(x)=e^{\sin x}[1+\cos 2x+\cos x\cdot(x+\sin x\cos x)]$,

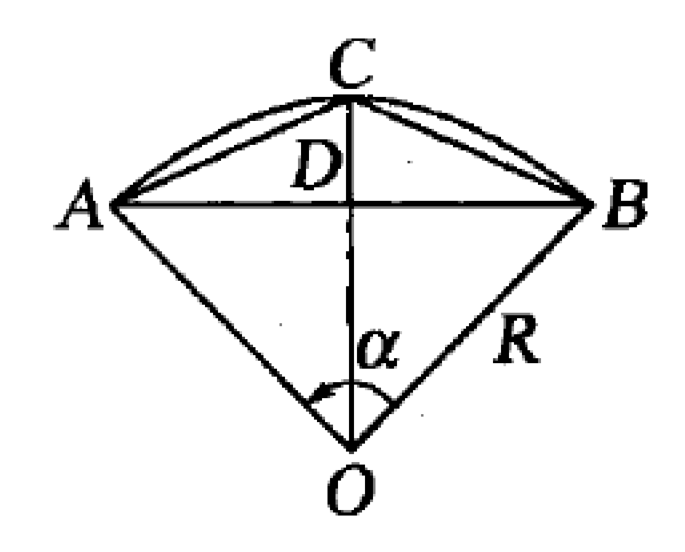
显然 $f'\left[\dfrac{2k+1}{2}\pi\right]=g'\left[\dfrac{2k+1}{2}\pi\right]=0$

$(k=0,1,2,\cdots)$.

所以不符合洛必达法则的条件，不能应用洛必达法则.

【1375】 设有一圆弓形，其弦为 b，矢为 h，此圆弓形内有一内接等腰三角形，如果当半径 R 不变，弓形的弧趋于零时，求出圆弓形面积与内接等腰三角形面积之比的极限. 利用所得到的结果推导出计算弓形面积的近似公式：$S\approx\dfrac{2}{3}bh$.

解　如1375题图所示



1375题图

$$AB = b, DC = h, \angle AOB = \alpha,$$

则　$$\frac{1}{2}b = AD = R \cdot \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$h = R - OD = R - R\cos\frac{\alpha}{2},$$

$\triangle ABC'$ 为内接等腰三角形,其面积为

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bh = R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right),$$

弓形面积为 $S = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$.

当弧长趋于零时,α 趋于0,于是

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{S}{S_{\triangle ABC}} = \lim_{\alpha\to0}\frac{\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)}{R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)}$$

$$= \lim_{\alpha\to0}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\right)}$$

$$= \lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{-\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha\to0}\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\frac{1}{2}+2\cos\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{-\frac{1}{2}+2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{4}{3},$$

因此，弓形面积的近似公式为

$$S\approx\frac{4}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}bh=\frac{2}{3}bh.$$

§ 10. 泰勒公式

1. 泰勒局部公式　如果

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $|x-x_0|<\varepsilon$ 内有定义；

(2) $f(x)$ 在此邻域内有直到 $(n-1)$（包括 $(n-1)$）阶的导数 $f'(x),\cdots f^{(n-1)}(x)$；

(3) 在 x_0 点存在 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\qquad ①$$

其中 $a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(k=0,1\cdots,n)$.

特别是当 $x_0=0$ 时，有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)\qquad ②$$

在所示条件下 ① 式是唯一的.

如果在点 x_0 存在导数 $f^{(n+1)}(x_0)$，则 ① 式中的余项可取以下形式：$o((x-x_0)^{n+1})$

由泰勒局部公式 ②，得出以下五个重要展开式：

① $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

② $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$.

③ $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$.

④ $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

⑤ $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n).$

2. 泰勒公式 如果

(1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内有定义;

(2) $f(x)$ 在此区间有连续导数 $f'(x),\cdots f^{(n-1)}(x)$;

(3) 当 $a<x<b$ 时,存在有限导数 $f^{(n)}(x)$,则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)\qquad(a\leqslant x\leqslant b),$$

其中
$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n$$

$(0<\theta<1)$(拉格朗日余项).

或
$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta_1)(x-a)}{(n-1)!}\cdot(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n$$

$(0<\theta_1<1)$(柯西余项).

【1376】 将多项式

$$P(x)=1+3x+5x^2-2x^3,$$

按照二项式 $x+1$ 的非负整数幂排列.

解 $P(-1)=5$,

$P'(x)=3+10x-6x^2$, $P'(-1)=-13$,

$P''(x)=10-12x$, $P''(-1)=22$,

$P'''(x)=-12$, $P'''(-1)=-12$,

$P^{(4)}(x)=0$.

由泰勒公式有

$$P(x)=P(-1)+\frac{P'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\frac{P^{(4)}[-1+\theta(x+1)]}{4!}(x+1)^4$$
$$=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3.$$

按照变量 x 的非负整数幂,写出下列函数的展开式至含有指

定阶数的项(1377 ~ 1387).

【1377】 $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 至含 x^4 的项,问 $f^{(4)}(0)$ 等于多少?

解 $\dfrac{1+x+x^2}{(1-x+x^2)}=(1+x+x^2)\dfrac{1+x}{1+x^3}$

$=(1+x+x^2)(1+x)[1-x^3+o(x^6)]$

$=1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)$,

$f^{(4)}(0)=4!\cdot(-2)=-48$.

【1378】 $\dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ 至含 x^2 的项.

解 设 $f(x)=\dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$.

则 $f'(x)=\dfrac{60(1+x)^{99}(1+6x)}{(1-2x)^{41}(1+2x)^{61}}$,

$f''(x)=\dfrac{60(1+x)^{98}(65+728x+2196x^2+48x^3)}{(1-2x)^{42}(1+2x)^{62}}$,

所以 $f(0)=1,f'(0)=60,f''(0)=3900$,

所以根据泰勒公式有

$$\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}=1+60x+1950x^2+o(x^2).$$

【1379】 $\sqrt[m]{a^m+x}$ $(a>0)$ 至含 x^2 的项.

解 设 $f(x)=\sqrt[m]{a^m+x}$.

则 $f'(x)=\dfrac{1}{m}(a^m+x)^{\frac{1-m}{m}}$,

$f''(x)=\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{(1-m)}{m}(a^m+x)^{\frac{1-2m}{m}}$,

所以 $f(0)=a,f'(0)=\dfrac{1}{m}a^{1-m}$,

$f''(0)=\dfrac{1-m}{m^2}a^{1-2m}$,

因此 $\sqrt[m]{a^m+x}=a+\dfrac{1}{ma^{m-1}}x+\dfrac{(1-m)}{2m^2a^{2m-1}}x^2+o(x^2)$.

【1380】 $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x}$ 至含 x^3 的项.

解 设 $f(x)=\sqrt{1-2x+x^2}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$.

则 $$f'(x)=\frac{1}{2}(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f''(x)=3x(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}(3x^2-2)^2(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{9}(2x-3)^2(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}},$$

$$f'''(x)=3(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{8}(3x^2-2)^3(1-2x+x^3)^{-\frac{5}{2}}-3x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}+\frac{4}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}+\frac{8}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}-\frac{10}{27}(2x-3)^3(1-3x+x^2)^{-\frac{8}{3}},$$

所以 $f(0)=0, f'(0)=0$.

$$f''(0)=\frac{1}{3}, f'''(0)=6.$$

由泰勒公式有

$$\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}=\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3).$$

【1381】 e^{2x-x^2} 至含 x^5 的项.

解 $$e^{2x-x^2}=1+(2x-x^2)+\frac{1}{2!}(2x-x^2)^2+\frac{1}{3!}(2x-x^2)^3+\frac{1}{4!}(2x-x^2)^4+\frac{1}{5!}(2x-x^2)^5+o(x^5).$$

$$=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5).$$

【1382】 $\dfrac{x}{e^x-1}$ 至含 x^4 的项.

解　当 x 很小时,令

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\Delta,$$

其中　$$\Delta=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4).$$

则 Δ 也很小. 于是

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1+\Delta}$$

$$=1-\Delta+\Delta^2-\Delta^3+\Delta^4+o(x^4),$$

而　$$\Delta^2=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{72}+o(x^4),$$

$$\Delta^3=\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{8}+o(x^4),$$

$$\Delta^4=\frac{x^4}{16}+o(x^4).$$

所以　$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4).$$

【1383】 $\sqrt[3]{\sin x^3}$ 至含 x^{13} 的项;

解　$\sqrt[3]{\sin x^3}$

$$=\left[x^3-\frac{x^9}{3!}+\frac{x^{15}}{5!}+o(x^{15})\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=x\left[1+\left(-\frac{x^6}{6}+\frac{x^{12}}{120}+o(x^{12})\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=x\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{x^{12}}{120}-\frac{x^6}{6}+o(x^{12})\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{x^{12}}{120}-\frac{x^6}{6}+o(x^{12})\right)^2+o(x^{12})\right]$$

$$=x-\frac{1}{18}x^7-\frac{1}{3240}x^{13}+o(x^{13}).$$

【1384】 $\ln\cos x$ 至含 x^6 的项.

解 $\ln\cos x=\frac{1}{2}\ln(1-\sin^2 x)$

$$=-\frac{1}{2}\left[\sin^2 x+\frac{\sin^4 x}{2}+\frac{\sin^6 x}{3}+o(\sin^6 x)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)^2\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)^4$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)^6+o(x^6)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6),$$

其中利用

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

即 $o(\sin x)=o(x).$

【1385】 $\sin(\sin x)$ 至含 x^3 的项.

解 $\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{3!}\sin^3 x+o(x^4)$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^3+o(x^4)$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4).$$

【1386】 $\tan x$ 至含 x^5 的项.

解 当 x 很小时

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)=1-\Delta,$$

其中 $\Delta=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)$ 很小,且

$$\Delta^2=\frac{x^4}{4}+o(x^5).$$

于是　$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)\frac{1}{1-\Delta}$$

$$=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)(1+\Delta+\Delta^2+o(x^4))$$

$$=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)\right)$$

$$=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5).$$

【1387】 $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ 至含 x^6 的项.

解 $\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln\dfrac{x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+o(x^7)}{x}$

$$=\ln\left[1+\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)\right)\right]$$

$$=\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)\right)^2$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)\right)^3+o(x^6)$$

$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o(x^6).$$

【1388】 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按照差 $(x-1)$ 的非负整数幂展开式的前三项.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}},$

$$f(1)=1, f'(1)=\frac{1}{2}, f''(1)=-\frac{1}{4},$$

于是　$\sqrt{x}=1+\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2).$

【1389】 将函数 $f(x)=x^x-1$ 按二项式 $(x-1)$ 的非负整数

幂，展开至含有$(x-1)^3$的项.

解 $f'(x)=x^x(1+\ln x)$,

$$f''(x)=x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1},$$

$$f'''(x)=x^x(1+\ln x)^3+2x^{x-1}(1+\ln x)+x^{x-1}\left(\frac{x-1}{x}+\ln x\right),$$

$$f(1)=0,f'(1)=1,$$

$$f''(1)=2,f'''(1)=3,$$

于是

$$x^x-1=(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+o((x-1)^3).$$

【1390】 在点$x=0$的邻域中，用二阶抛物线近似地代替函数$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}(a>0)$.

解 $y\,|_{x=0}=a, y'\,|_{x=0}=\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_{x=0}=0$,

$$y''\,|_{x=0}=\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\Big|_{x=0}=\frac{1}{a},$$

于是 $a\operatorname{ch}\frac{x}{a}=a+\frac{x^2}{2a}+o(x^2)\approx a+\frac{x^2}{2a}$.

【1391】 按照分数$\frac{1}{x}$的非负整数幂将函数

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}-x\qquad(x>0),$$

展开到含$\frac{1}{x^3}$的项.

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=1+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{8}\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

所以 $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x=x\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}-1\right]$

$$=\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

【1392】 按照增量 h 的非负整数幂将函数

$$f(h)=\ln(x+h)\qquad(x>0),$$

展开到含 h^n 的项(n 为自然数).

解 $\ln(x+h)$

$$=\ln\left[x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]=\ln x+\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\ln x+\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3}+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{nx^n}+o(h^n).$$

【1393】 假设

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$$

$$(0<\theta<1),$$

并且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$. 证明 $\lim\limits_{n\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

解 按题设

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),$$

其中 $0<\theta<1$. 又因 $f^{(n+1)(x)}$ 存在,故

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)$$

$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}),$$

所以 $$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x).$$

$$+o(h^{n+1})$$

从而有 $$\theta\cdot\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}$$

$$=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)+n!\frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}},$$

注意到 $$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=f^{(n+1)}(x)\neq 0.$$

上式两边取极限可得

$$\lim_{h\to0}\theta=\frac{\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)}{f^{(n+1)}(x)}=\frac{1}{n+1}.$$

【1393.1】 当 $x\to0$ 时,设 $f(x)=1+kx+o(x)$,证明:

$$\lim_{x\to0}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=e^k.$$

解 因为 $\lim_{x\to0}\ln[f(x)]^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln[f(x)]}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+kx+o(x)]}{kx+o(x)}\cdot\frac{kx+o(x)}{x}=k,$$

故 $\lim_{x\to0}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\ln[f(x)]^{\frac{1}{x}}}=e^k.$

【1393.2】 假设

$$f(x)\in C^{(2)}[0,1]\text{ 及 }f(0)=f(1)=0;$$

并且当 $x\in(0,1)$ 时 $|f''(x)|\leqslant A$.

证明:当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,$|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}$.

证 设 $x_0\in[0,1]$,则由泰勒公式有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0+\theta(x-x_0))}{2!}(x-x_0)^2,$$

其中 $0<\theta<1,x\in[0,1]$.

特别地,将 $x=0$ 及 $x=1$ 分别代入上式得

$$0=f(0)=f(x_0)-x_0f'(x_0)+\frac{f''(x_0-\theta_1x_0)}{2!}x_0^2,\qquad ①$$

$$0=f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(x_0+\theta_2(1-x_0))}{2!}(1-x_0)^2,\qquad ②$$

其中 $0<\theta_1<1,0<\theta_2<1$.

② 式减去 ① 式得

$$f'(x_0)=\frac{1}{2!}[f''(x_0+\theta_2(1-x_0))(1-x_0)^2$$
$$-f''(x_0-\theta_1x_0)x_0^2],$$

所以　$|f'(x_0)|\leqslant\frac{1}{2}A[(1-x_0)^2+x_0^2]\leqslant\frac{A}{2}.$

【1393.3】 假设

$$f(x)(-\infty<x<+\infty),$$

是可微分二次的函数，且

$$M_k=\sup_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty\qquad(k=0,1,2),$$

证明：不等式 $M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.

证　由泰勒公式对任何 h 有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2,\qquad ①$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2,\qquad ②$$

其中 ξ_1 位于 x 与 $x+h$ 之间，ξ_2 位于 x 与 $x-h$ 之间

① 式减 ② 式得

$$f(x+h)-f(x-h)$$
$$=2f'(x)h+\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)],$$

即　$$2f'(x)h=f(x+h)-f(x-h)$$
$$-\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)],$$

所以　$$2h|f'(x)|\leqslant|2hf'(x)|$$
$$\leqslant|f(x+h)|+|f(x-h)|$$
$$+\frac{h^2}{2}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]$$
$$\leqslant 2M_0+h^2M_2,$$

即　$M_2h^2-2|f''(x)|h+2M_0\geqslant 0,$

上式对任何 h 都成立，故左边二次式的判别式必小于等于零.

即　$4|f'(x)|-4M_2(2M_0)\leqslant 0,$

即　$|f'(x_0)|\leqslant 2M_0M_2.$

由 x 的任意性有 $M_1 \leqslant 2M_0M_2$.

【1394】 估计下列似公式的绝对误差:

(1) $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$;

(2) $\sin x \approx x-\frac{x^3}{6}$ 当 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$;

(3) $\tan x \approx x+\frac{x^3}{3}$ 当 $|x| \leqslant 0.1$;

(4) $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$.

解 用拉格朗日余项公式估计误差:

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1).$$

(1) 由 $f(x)=e^x$ 及 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 得

$$f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}<e \quad (0<\theta<1).$$

于是当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,

$$|R_{n+1}(x)|<\frac{e}{(n+1)!}|x|^{n+1}<\frac{e}{(n+1)!}.$$

(2) 由 $f(x)=\sin x$ 得

$$|f^{(5)}(\theta x)|=\left|\sin\left(\theta x+\frac{5\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1.$$

于是当 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ 时,

$$|R_4(x)| \leqslant \frac{1}{5!}|x|^5 \leqslant \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{1}{3840}.$$

(3) 由 $f(x)=\tan x$ 得

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}, f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^2 x},$$

$$f'''(x)=\frac{6}{\cos 4x}-\frac{4}{\cos^2 x},$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{24\sin x}{\cos^5 x}-\frac{8\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{16}{\cos^2 x}+\frac{120\sin^2 x}{\cos^6 x},$$

注意到　$f'(0)=1, f''(0)=0,$

$f'''(0)=2, f^{(4)}=0.$

当 $|x|\leqslant 0.1$ 时 $|\sin x|\leqslant|x|\leqslant 0.1,$

$\cos^2 x\geqslant\cos^2 0.1=|1-\sin^2 0|>0.99,$

所以
$$|R_5(x)|=\left|\frac{f^{(5)}(\theta x)}{5!}x^5\right|$$
$$\leqslant\frac{0.1^5}{5!}\left(\frac{16}{0.99}+\frac{120\times 0.1^2}{0.99^3}\right)$$
$$<2\times 10^{-6}.$$

(4) 由 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 及 $0\leqslant x\leqslant 1$ 得
$$|f'''(x)|=\frac{3}{8}\left|\frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}\right|\leqslant\frac{3}{8},$$

于是
$$|R_3(x)|\leqslant\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}=\frac{1}{16}\qquad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

【1395】 近似公式 $\cos x=1-\frac{x^2}{2}$ 对于怎样的 x 可以精确到 0.0001.

解　误差 $|\Delta|\leqslant\frac{|x|^4}{4!}$,

按题设需 $\frac{|x|^4}{4!}<0.0001$,

于是　$|x|<0.22$(弧度).

【1395.1】 证明公式
$$\sqrt[n]{a^n+x}=a+\frac{x}{na^{n-1}}-r,(n\geqslant 2,a>0,x>0),$$
$$0<r<\frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{2n-1}.$$

证　设 $f(x)=\sqrt[n]{a^n+x}\qquad(n\geqslant 2,a>0,x\geqslant 0)$,

则
$$f'(x)=\frac{1}{n}(a^n+x)^{\frac{1-n}{n}},$$
$$f''(x)=-\frac{n-1}{n^2}(a^n+x)^{\frac{1-2n}{n}},$$

$$f(0)=a, f'(0)=\frac{1}{na^{n-1}}.$$

由拉格朗日余项公式

有 $$f(x)=f(0)+f'(0)x+R_2(x)$$
$$=a+\frac{x}{na^{n-1}}+R_2(x),$$

其中 $$R_2(x)=-\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n^2}(a^n+\theta x)^{\frac{1-2n}{n}}x^2,(0<\theta<1),$$

记 $$r=-R_2(x)=\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n^2}(a^n+\theta x)^{\frac{1-2n}{n}}x^2.$$

显然 $r>0$,而$(a^n+\theta x)^{\frac{2n-1}{n}}>a^{2n-1}$;

所以 $$0<r<\frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{a^{2n-1}}.$$

注:原题误为 $0<r<\dfrac{n-1}{2n^2}\cdot\dfrac{x^2}{2n-1}$,

事实上这是不成立的,例如,取 a 充分小,$0<x\leqslant a^n$,则

$$(a^n+\theta x)^{\frac{2n-1}{n}}<2^{\frac{2n-1}{n}}\cdot a^{2n-1}<2a^{2n-1},$$

则 $$r>\frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{2a^{2n-1}}.$$

当 a 取得充分小,将会有$\dfrac{1}{2a^{2n-1}}>\dfrac{1}{2n-1}$ 这说明原题的结论是错误的.

【1396】 运用泰勒公式近似地计算:

(1) $\sqrt[3]{30}$; (2) $\sqrt[5]{250}$; (3) $\sqrt[12]{4000}$;

(4) $\sqrt{e}$; (5) $\sin 18°$; (6) $\ln 1.2$;

(7) $\arctan 0.8$; (8) $\arcsin 0.45$; (9) $(1.1)^{1.2}$;

并估计误差.

解 (1) $\sqrt[3]{30}$

$$=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\approx 3\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{9}\right)^2\right]\approx 3.1072,$$

$$\Delta < 3 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}}{3!} \left(\frac{1}{9}\right)^3 \approx 2.54 \times 10^{-4}.$$

(2) $\sqrt[5]{250} = 3\left(1+\frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$\approx 3\left[1+\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{243}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\left(\frac{7}{243}\right)^2\right]$$

$$\approx 3.0171,$$

$$\Delta < 3 \times \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\left(\frac{7}{243}\right)^3 \approx 4.8 \times 10^{-6}.$$

(3) $\sqrt[12]{4000} = 2\left(1-\frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{12}}$

$$\approx 2\left(1-\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{128}\right) \approx 1.9960,$$

$$\Delta < 2\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{11}{12}\cdot\left(\frac{3}{128}\right)^2 \approx 8.4 \times 10^{-5}.$$

(4) $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$+\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 1.64872,$$

$$\Delta = \frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{1}{8!}\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots$$

$$< \frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\right)^7 \frac{1}{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}} \approx 1.6 \times 10^{-6}.$$

(5) $\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 \approx 0.309017.$

$$\Delta < \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^7 \approx 6 \times 10^{-8}.$$

(6) $\ln 1.2 = \ln(1+0.2)$

$$\approx 0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.3)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4$$

$$+\frac{1}{5}(0.2)^5-\frac{1}{6}(0.2)^6+\frac{1}{7}(0.2)^7$$

$$\approx 0.182321,$$

$$\Delta < \frac{1}{8}(0.2)^8 \approx 3.2 \times 10^{-7}.$$

(7) $\arctan 0.8 \approx 0.8 - \frac{1}{3}(0.8)^3 + \frac{1}{5}(0.8)^5$

$$- \frac{1}{7}(0.8)^7 + \cdots - \frac{1}{39}(0.8)^{39}$$

$$\approx 0.67474(\text{弧度}),$$

$$\Delta < \frac{1}{41}(0.8)^{41} \approx 2.6 \times 10^{-6}.$$

(8) $\arcsin 0.45$

$$\approx 0.45 + \frac{1}{2 \cdot 3}(0.45)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}(0.45)^5 + \cdots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13}(0.45)^{13}$$

$$\approx 0.46676(\text{弧度}),$$

$$\Delta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15}(0.45)^{15}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdots 15}{2 \cdot 4 \cdots 16 \cdot 17}(0.45)^{17} + \cdots$$

$$< \frac{1}{15}(0.45)^{15} \frac{1}{1-(0.45)^2} \approx 5.25 \times 10^{-7}.$$

(9) 先计算 $\ln 1.1$.

$$\ln 1.1 = \ln(1+0.1)$$

$$= 0.1 - \frac{0.1^2}{2} + \cdots + \frac{(0.1)^5}{5} \approx 0.0953,$$

$$(1.1)^{1.2} = e^{1.2\ln 1.1} \approx e^{1.2 \times 0.0953} \approx 1.12117,$$

$$\Delta = \frac{1}{4!}e^{1.2 \times 0.0953\theta}(0.0953 \times 1.2)^4 < 7.9 \times 10^{-6}.$$

【1397】 计算:

(1) e 准确到 10^{-9}; (2) $\sin 1^\circ$ 准确到 10^{-8};

(3) $\cos 9^\circ$ 准确到 10^{-5}; (4) $\sqrt{5}$ 准确到 10^{-4};

(5) $\lg 11$ 准确到 10^{-5}.

解　(1) $$\Delta=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots$$
$$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{(n+1)}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n},$$

要使 $\Delta<10^{-9}$，只需 $n!n>10^9$，取 $n=11$ 即可，于是

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{11!}\approx 2.718281828.$$

(2) $$\Delta<\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n+1},$$

要 $\Delta<10^{-8}$，只要

$$\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n+1}<10^{-8},$$

只须 $n>2$ 于是

$$\sin 1^\circ\approx\frac{\pi}{180}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\approx 0.01745241.$$

(3) $$\Delta<\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^{2n},$$

要 $\Delta<10^{-5}$，只须

$$\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^{2n}<10^{-5},$$

只须取 $n\geqslant 3$，于是

$$\cos 9^\circ\approx 1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4\approx 0.98769.$$

(4) $$\sqrt{5}=2\sqrt{1+\frac{1}{4}},$$

$$\Delta<2\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

要 $\Delta<10^{-4}$，只需

$$2\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}<10^{-4},$$

只需 $n \geqslant 4$，于是

$$\sqrt{5} \approx 2\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1\cdot 1}{2!2^2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{3!2^3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]$$
$$\approx 2.2361$$

(5) $\lg 11 = 1+\lg(1+0.1)$

$$= 1+\frac{1}{\ln 10}\cdot\ln(1+0.1)$$

$$\Delta < \frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1},$$

要使 $\Delta < 10^{-5}$，只要

$$\frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1} < 10^{-5},$$

取 $n \geqslant 4$ 即可，于是

$$\lg 11 \approx 1+\left[0.1-\frac{1}{2}(0.1)^2+\frac{1}{3}(0.1)^3 -\frac{1}{4}(0.1)^4\right]\frac{1}{\ln 10} \approx 1.04139.$$

利用五个基本展开式，求下列极限(1398 ~ 1409).

【1398】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right]}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}\right)x^4+o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

【1399】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right]\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]-x-x^2}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

【1400】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-2\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-2\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{4}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=-\frac{1}{4}.$$

【1401】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\left(1-\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3}+x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{3}.$$

【1402】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right.$$

$$\left.-x^3\left(1+\frac{1}{2x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)=\frac{1}{6},$$

其中 $o(1)$ 表示当 $x\to+\infty$ 时为无穷小量.

【1403】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2} \qquad (a>0).$

解 $$\lim_{x\to+0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to+0}\frac{e^{x\ln a}+e^{-x\ln a}-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\left[\left(1+x\ln a+\frac{x^2}{2!}\ln^2 a+o(x^2)\right)\right.$$

$$\left.+\left(1-x\ln a+\frac{x^2}{2!}\ln^2 a+o(x^2)\right)-2\right]$$

$$=\lim_{x\to+0}[\ln^2 a+o(1)]=\ln^2 a \qquad (a>0).$$

【1404】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right].$

解 $$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}+o(1)\right]=\frac{1}{2}.$$

【1405】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right).$

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x\left[1-\left(\frac{x^2}{3!}+o(x^2)\right)\right]}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\left[1+\frac{x^2}{3!}+o(x^2)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{3!}+o(x)\right)=0.$$

【1406】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right).$

解　$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)}{x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right)\left(1+\frac{1}{3!}x^2+o(x^4)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^3)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{3}+o(1)\right]=\frac{1}{3}.$$

【1406.1】　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\frac{1}{3!}\sin^3x+\frac{1}{5!}\sin^5x+o(\sin^5x)-x\left[1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2!}\frac{2}{3^2}x^4+o(x^5)\right]}{x^5}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^5}\left\{\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)\right)^5+o(x^5)-\left[x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^5+o(x^6)\right]\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5+o(x^5)\right]-\left[x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^5+o(x^6)\right]}{x^5}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{19}{90}x^5+o(x^5)}{x^5}=\frac{19}{90}.$$

【1406.2】　$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{\sin x\ln\cos x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{\frac{1}{2}\sin x\ln\cos^2x}}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-e^{\frac{1}{2}\sin x\ln(1-\sin^2x)}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-e^{\frac{1}{2}\sin^3x+o\sin^3x}}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1+\frac{1}{2}\sin^3 x+o(x^3)\right]}{x^3}=-\frac{1}{2}.$$

【1406.3】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}(\tan x)-x}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}(\tan x-x)}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\frac{1}{3!}\tan^3 x+o(\tan^4 x)-x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\tan^3 x+o(x^4)}{x^3}$$

$$= \frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3\cos x}$$

$$= \frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right)-x\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right)}{x^3}$$

$$= \frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

当 $x\to 0$ 时，求出无穷小的量 y 的求出形如 Cx^n（C 为常数）的主项，(1407 ～ 1409).

【1407】 设 $y=\tan(\sin x)-\sin(\tan x)$.

解 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^7)$,

$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{35}+o(x^7)$,

所以 $y=\tan(\sin x)-\sin x(\tan x)$

$$=\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x+\frac{2}{15}\sin^5 x+\frac{1}{35}\sin^7 x+o(\sin^7 x)\right)$$

$$-\left(\tan x-\frac{1}{3!}\tan^3 x+\frac{1}{5!}\tan^5 x-\frac{1}{7!}\tan^7 x+o(\tan^7 x)\right.$$

$$=\left[\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+o(x^7)\right)\right.$$

$$+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+o(x^7)\right)^3$$

$$+\frac{2}{15}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+o(x^7)\right)^5$$

$$+\frac{1}{315}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+o(x^7)\right)^7+o(x^7)\Big]$$

$$-\Big[\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{35}+o(x^7)\right)$$

$$-\frac{1}{3!}\left(x+\frac{x^2}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{3.5}+o(x^7)\right)^3$$

$$+\frac{1}{5!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{35}+o(x^7)\right)^5$$

$$-\frac{1}{7!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{35}+o(x^7)\right)^7+o(x^7)\Big]$$

$$=\frac{x^7}{30}+o(x^7),$$

故 y 的主项为$\frac{x^7}{30}$.

【1408】 $y=(1+x)^x-1$.

解 $y=e^{x\ln(1+x)}-1=e^{x\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}-1$

$$=e^{x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}-1$$

$$=1+\left[x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right]$$

$$+o\left(x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-1$$

$$=x^2+o(x^2),$$

故 y 的主项为 x^2.

【1409】 $y=1+\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}$.

解 $y=1-\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}=1-e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}$

$$=1-e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1}=1-e^{-\frac{x}{2}+o(x)}$$

$$= 1-\left[1+\left(-\frac{x}{2}+o(x)\right)+o\left(-\frac{x}{2}+o(x)\right)\right]$$

$$= \frac{x}{2}+o(x),$$

故 y 的主项为$\frac{x}{2}$.

【1410】 怎样选择系数 a 和 b，使 $x-(a+b\cos x)\sin x$ 对于 x 是 5 阶无穷小？

解 $x-(a+b\cos x)\sin x$

$$= x-a\sin x-\frac{b}{2}\sin 2x$$

$$= x-a\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right]$$

$$-\frac{b}{2}\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+\frac{1}{5!}(2x)^5+o(x^5)\right]$$

$$= (1-a-b)x+\left(\frac{a}{b}+\frac{2b}{3}\right)x^3-\left(\frac{a}{120}+\frac{2b}{15}\right)x^5+o(x^5),$$

故要使此量为 x 的 5 阶无穷小，当且仅当

$$\begin{cases} 1-a-b=0, \\ \dfrac{a}{b}+\dfrac{2b}{3}=0, \end{cases}$$

解之得 $a=\frac{4}{3}, b=-\frac{1}{3}$.

【1410.1】 怎样选择系数 A 和 B，使得当 $x\to 0$ 时成立渐近等式 $\cot x=\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+o(x^5)$.

解 因为

$$\cot x-\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}$$

$$= \frac{(x+Bx^3)\cos x-(1+Ax^2)\sin x}{(x+Bx^3)\sin x},$$

要使 $\cot x-\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}=o(x^5)$.

当且仅当

$$(x+Bx^3)\cos x-(1+Ax^2)\sin x=o(x^7),$$

而 $$(x+Bx^3)\cos x-(1+Ax^2)\sin x$$

$$=(x+Bx^3)\left[x-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^6)\right]$$

$$-(1+Ax^2)\left[x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^7)\right]$$

$$=\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+B-A\right)x^3$$

$$+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2!}B-\frac{1}{5!}+\frac{1}{3!}A\right)x^5+o(x^7),$$

故 $$\begin{cases}-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+B-A=0,\\ \dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}-\dfrac{1}{2!}B+\dfrac{1}{3!}A=0.\end{cases}$$

解之得 $A=-\dfrac{2}{5},B=-\dfrac{1}{15}$,

故当 $A=-\dfrac{2}{5},B=-\dfrac{1}{15}$ 时,

$$\cot x=\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+o(x^5).$$

【1410.2】 当 $x\to 0$ 时,怎样的系数 A、B、C 和 D 使得渐近公式 $e^x=\dfrac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}+o(x^5)$ 成立.

解 因为

$$e^x-\frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}$$

$$=\frac{e^x(1+Cx+Dx^2)-(1+Ax+Bx^2)}{1+Cx+Dx^2}$$

$$\sim e^x(1+Cx+Dx^2)-(1+Ax+Bx^2),$$

故要使 $$e^x=\frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}+o(x^5),$$

必须 $$e^x(1+Cx+Dx^2)-(1+Ax+Bx^2)=o(x^5),$$

而 $$e^x(1+Cx+Dx^2)-(1+Ax+Bx^2)$$

$$= \left[1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)\right](1 + Cx + Dx^2) - (1 + Ax + Bx^2)$$

$$= (1 - C - A)x + \left(\frac{1}{2!} + C + D - B\right)x^2 + \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}C + D\right)x^3 + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!}C + \frac{1}{2!}D\right)x^4 + o(x^5),$$

因此，有 $\begin{cases} C - A + 1 = 0, \\ C + D - B + \dfrac{1}{2} = 0, \\ \dfrac{1}{6}C + \dfrac{1}{2}D + \dfrac{1}{24} = 0, \\ \dfrac{1}{2}C + D + \dfrac{1}{6} = 0. \end{cases}$

解之得　$A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{12}, C = -\frac{1}{2}, D = \frac{1}{12}$.

因此，当 $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{12}, C = -\frac{1}{2}, D = \frac{1}{12}$ 时，

$$e^x = \frac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^2} + o(x^5).$$

【1411】　设 $|x|$ 为小量，推导下列各式的简单近似公式：

(1) $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2}$　　$(R > 0)$;

(2) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;

(3) $\frac{A}{x}\left[1 - \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{-n}\right]$;

(4) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{x}{100}\right)}$.

解　(1) $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} = \frac{1}{R^2}\left[1 - \left(1 + \frac{x}{R}\right)^{-2}\right]$

$$\approx \frac{1}{R^2}\left[1 - \left(1 - \frac{2x}{R}\right)\right] = \frac{2x}{R^3}.$$

(2) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$

$$=\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\approx\left[1+\frac{2x}{3(1-x)}\right]-\left[1-\frac{2x}{3(1+x)}\right]$$

$$=\frac{4x}{3(1-x^2)}\approx\frac{4}{3}x.$$

(3) $\frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]\approx\frac{A}{x}\left[1-\left(1-\frac{nx}{100}\right)\right]=\frac{nA}{100}.$

(4) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)}\approx\frac{\ln 2}{\frac{x}{100}}=\frac{100\ln 2}{x}\approx\frac{70}{x}.$

【1412】 设 x 的绝对值为无穷小量，推导出形如 $x=\alpha\sin x+\beta\tan x$ 的近似公式. 并且精确到 x^5 项.

将这一公式用于小角度值的弧长的近似求法.

解 $\alpha\sin x+\beta\tan x$

$$=\alpha\left[x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right]$$

$$+\beta\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right]$$

$$=(\alpha+\beta)x-\left(\frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{3}\right)x^3-\left(\frac{\alpha}{120}+\frac{2\beta}{15}\right)x^5+o(x^5)$$

要使近似公式 $x=\alpha\sin\alpha+\beta\tan x$ 准确到 x^5 项，当且仅当

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1,\\ \frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{3}=0,\end{cases}$$

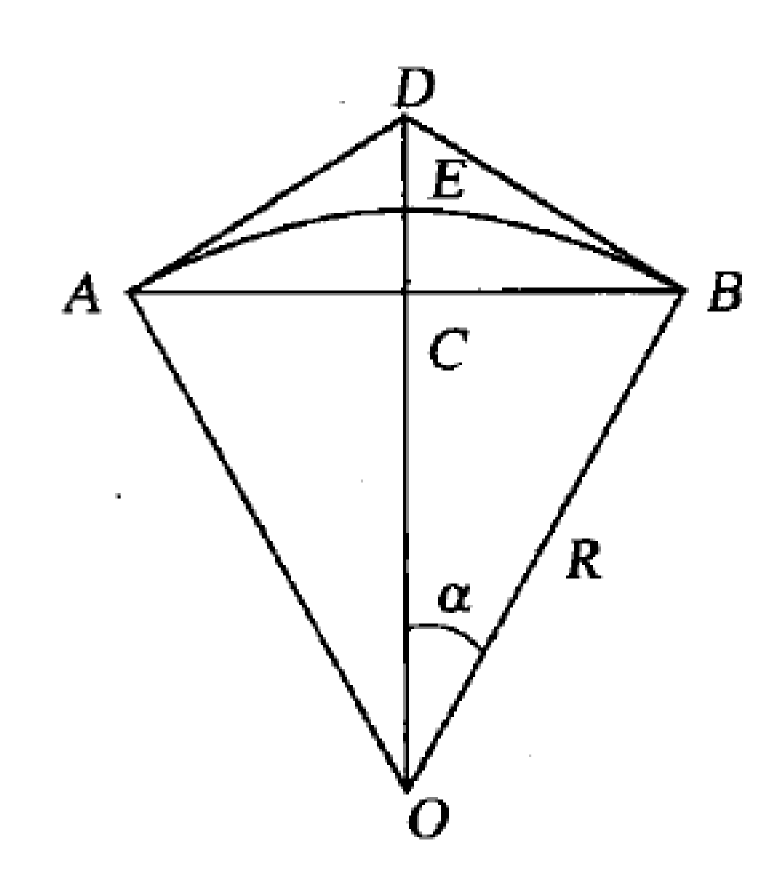
解之得 $\alpha=\frac{2}{3}$，$\beta=\frac{1}{3}$，于是近似公式为

$$x\approx\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}\tan x.$$

弧长 = 中心角 × 半径，设中心角为 x，半径为 R，则弧长 $=Rx\approx\frac{2R}{3}\sin x+\frac{R}{3}\tan x$，此即小角度的弧长的近似公式.

【1413】 估计切贝绍夫法则的相对误差:圆弧近似地等于等腰三角形两腰的和,此等腰三角形立于该圆弧的弦上,且高为此弓形之矢的 $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

解 如1413题图所示



1413 题图

$$BC = R\sin\alpha,$$

$$BC^2 = R^2\sin^2\alpha = \frac{R^2}{2}(1-\cos 2\alpha),$$

$$DC = \sqrt{\frac{4}{3}}EC = \sqrt{\frac{4}{3}}R(1-\cos\alpha),$$

$$DC^2 = \frac{4}{3}R^2(1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha)$$

$$= R^2\left(2-\frac{8}{3}\cos\alpha+\frac{2}{3}\cos 2\alpha\right),$$

于是 $$BD^2 = BC^2 + DC^2$$

$$= R^2\left(\frac{5}{2}-\frac{8}{3}\cos\alpha+\frac{1}{6}\cos 2\alpha\right)$$

$$= R^2\left\{\frac{5}{2}-\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{24}\alpha^4-\frac{1}{720}\alpha^6\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\left(1-2\alpha^2+\frac{2}{3}\alpha^4-\frac{4}{45}\alpha^6\right)\right\}+o(\alpha^7)$$

$$= R^2\left(\alpha^2 - \frac{1}{90}\alpha^6\right) + o(\alpha^7)$$

$$= R^2\alpha^2\left[1 - \frac{1}{90}\alpha^4 + o(\alpha^5)\right] \doteq R^2\alpha^2(1-\Delta),$$

其中 $\Delta = \frac{1}{90}\alpha^4 + o(\alpha^5)$,

$$BD = R\alpha\sqrt{1-\Delta} = R\alpha\left[1 - \frac{1}{2}\Delta + o(\Delta^2)\right]$$

$$= R\alpha\left[1 - \frac{1}{180}\alpha^4 + o(\alpha^5)\right].$$

从而 $\left|\overset{\frown}{BE} - BD\right| = \left|R\alpha - R\alpha\left(1 - \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5)\right)\right|$

$$= \frac{R}{180}\alpha^5 + o(\alpha^6),$$

因此,所求的相对误差为

$$\left|\frac{\overset{\frown}{AB} - (AD+BD)}{\overset{\frown}{AB}}\right| = \left|\frac{2\overset{\frown}{BE} - 2BD}{2\overset{\frown}{BE}}\right|$$

$$= \frac{\left|\overset{\frown}{BE} - BD\right|}{\left|\overset{\frown}{BE}\right|} = \frac{\frac{R}{180}\alpha^5 + o(\alpha^6)}{\alpha R} = \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5).$$

§ 11. 函数的极值. 最大值和最小值

1. 极值的必要条件

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的双侧邻域中有定义,并且对于某域:$0 < |x - x_0| < \delta$ 内的所有点 x,有下列不等式成立:

$$f(x) < f(x_0) \text{ 或 } f(x) > f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值(极大值或极小值).

如果存在极值点 x_0 且 $f'(x_0)$ 存在,则 $f'(x_0) = 0$.

2. 极值的充分条件

第一法则 如果(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内有定义并且是连续的,且 $f'(x_0) = 0$ 或不存在

(临界点);

(2) $f(x)$ 在 $0<|x-x_0|<\delta$ 域内具有有限的导数 $f'(x)$;

(3) 导数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号,则函数 $f(x)$ 的性质用下表表示:

	导数的符号		结论
	$x<x_0$	$x>x_0$	
Ⅰ	+	+	无极值
Ⅱ	+	−	极大值
Ⅲ	−	+	极小值
Ⅳ	−	−	无极值

第二法则 如果函数 $f(x)$ 有二阶导数 $f''(x)$ 且在点 x_0 有下列条件成立:

$$f'(x)=0 \text{ 且 } f''(x_0)\neq 0,$$

则函数 $f(x)$ 在此点有极值,也就是说:当 $f''(x_0)<0$ 时,有极大值;而当 $f''(x_0)>0$ 时,有极小值.

第三法则 假设函数 $f(x)$ 在某区间 $|x-x_0|<\delta$ 内有导数 $f'(x)\cdots,f^{n-1}(x)$,并且在点 x_0 有导数 $f^{(n)}(x_0)$,而且

$$f^{(k)}(x_0)=0 \qquad (k=1\cdots,n-1),$$

$$f^{(n)}(x_0)\neq 0;$$

在这种情况下:(1) 如果 n 为偶数,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极值,也就是说:当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时,有极大值,当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时,有极小值;

(2) 如果 n 为奇数,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值.

3. 绝对极值

在闭区间$[a,b]$上,或在其临界点(即导数 $f'(x)$ 等于零或不存在),或者在该区间的边界点 a 和 b,连续函数 $f(x)$ 达到其最大(最小)值.

研究下列函数的极值(1414 ~ 1422).

【1414】 $y=2+x-x^2$;

解　$y' = 1 - 2x$,令 $y' = 0$,得 $x = \frac{1}{2}$.

由于 $y'' = -2 < 0$,所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时函数取极大值

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}.$$

【1415】　$y = (x-1)^3$;

解　因为 $y' = 3(x-1)^2 > 0 \quad (x \neq 1)$.

所以函数在$(-\infty, +\infty)$始终单调上升,故函数 y 无极值.

【1416】　$y = (x-1)^4$;

解　$y' = 4(x-1)^3$,令 $y' = 0$,得 $x = 1$,

当 $x < 1$ 时,$y' < 0$,函数单调减小,

当 $x > 1$ 时,$y' > 0$,函数单调增加.

所以,当 $x = 1$ 时,函数取极小值 $y = 0$.

【1417】　$y = x^m(1-x)^n \quad$ (m 和 n 为正整数);

解　$y' = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m-(m+n)x]$.

令 $y' = 0$,得

$$x = 0, x = 1, x = \frac{m}{m+n}.$$

(1) 若 m 为偶数,则

当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时,$y' > 0$;

当 $x < 0$ 时,$y' < 0$;

所以,在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$.

(2) 若 m 为奇数,则 y' 在 $x = 0$ 的附近不变号,故无极值.

(3) 当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时,$y' > 0$;

当$\frac{m}{m+n} < x < 1$ 时,$y' < 0$;

所以函数 y 在 $x = \frac{m}{n+m}$ 处有极大值 $y = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$.

(4) 同理,若 n 为偶数,则函数在 $x = 1$ 处有极小值 $y = 0$

若 n 为奇数,则当 $x=1$ 时函数无极值.

【1418】 $y=\cos x+\operatorname{ch}x$;

解 $y'=-\sin x+\operatorname{sh}x$.

令 $y'=0$,得 $x=0$,

由于 $y''=-\cos x+\operatorname{ch}x, y''(0)=0$,

$y'''=\sin x+\operatorname{sh}x, y'''(0)=0$,

$y^{(4)}=\cos x+\operatorname{ch}x, y^{(4)}(0)=2>0$.

所以当 $x=0$ 时,函数有极小值 $y=2$.

【1419】 $y=(x+1)^{10}e^{-x}$;

解 $y'=e^{-x}(x+1)^9(9-x)$.

令 $y'=0$,得 $x=-1$ 及 $x=9$,

当 $x<-1$ 时,$y'<0$;

当 $-1<x<9$ 时,$y'>0$;

当 $x>9$ 时,$y'<0$;

所以,当 $x=-1$ 时,函数有极小值 $y=0$.

当 $x=9$ 时,函数有极大值 $y=10^{10}e^{-9}$.

【1420】 $y=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ (n 为自然数);

解 $y'=-\frac{1}{n!}e^{-x}x^n$.

令 $y'=0$,得 $x=0$.

(1) 若 n 为偶数,由于 $y'<0(x\neq 0)$,故函数无极值.

(2) 若 n 为奇数,则

当 $x<0$ 时,$y'>0$,

当 $x>0$ 时,$y'<0$,

所以,当 $x=0$ 时,函数有极大值 $y=1$.

【1421】 $y=|x|$;

解 $y|_{x=0}=0$,

而当 $x\neq 0$ 时,恒有 $y=|x|>0$,

所以,当 $x=0$ 时,函数有极小值 $y=0$.

【1422】 $y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$;

解 $y' = \dfrac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

令 $y' = 0$ 得 $x = \dfrac{1}{3}$.

且 y' 在 $x = 0$ 处及 $x = 1$ 处不存在.

当 $x < 0$ 时, $y' > 0$;

当 $0 < x < \dfrac{1}{3}$ 时, $y' > 0$;

当 $\dfrac{1}{3} < x < 1$ 时, $y' < 0$;

当 $x > 1$ 时, $y' > 0$.

所以当 $x = 0$ 时,函数无极值,当 $x = \dfrac{1}{3}$ 时,函数有极大值 $y = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{4}$.

当 $x = 1$ 时,函数有极小值 $y = 0$.

【1423】 研究函数 $f(x) = (x-x_0)^n\varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 的极值,(n 为自然数),其中当 $x = x_0$ 时,函数 $\varphi(x)$ 连续且 $\varphi(x_0) \neq 0$.

解 由于 $\varphi(x)$ 在 x_0 点连续,且 $\varphi(x_0) \neq 0$. 所以存在 x_0 的一个邻域 $N_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 使得 $\varphi(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 内与 $\varphi(x_0)$ 同号. 又 $f(x_0) = 0$.

(1) 若 n 为奇数,则经过 x_0 点时,函数 $f(x)$ 的值改变符号,所以在 $x = x_0$ 处没有极值.

(2) 若 n 为偶数,则

$$(x-x_0)^n > 0 \qquad (x \neq x_0).$$

因而当 $\varphi(x_0) > 0$ 时,

$$f(x) > f(x_0) = 0 \qquad (0 < |x-x_0| < \delta),$$

所以,当 $x = x_0$ 时有极小值 $f(x_0) = 0$.

当 $\varphi(x_0) < 0$ 时,则

$$f(x) < f(x_0) = 0, (0 < |x-x_0| < \delta),$$

所以,当 $x = x_0$ 时,有极大值 $f(x_0) = 0$.

【1424】 假设 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ 且 x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点,即 $P_1(x_0) = 0, Q(x_0) \neq 0$.

证明:$\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P'_1(x_0)$.

证 因为

$$f''(x) = \frac{P'_1(x)Q^2(x) - 2Q(x)Q'(x)P_1(x)}{Q^4(x)},$$

于是 $$f''(x_0) = \frac{P'_1(x_0)}{Q^2(x_0)}.$$

由于 $Q^2(x_0) > 0$,所以有

$$\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P'_1(x_0).$$

【1425】 能否断定:如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值,则在此点某充分小的邻域内,函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧递增,而右侧是递减?

研究例子:若 $x \neq 0, f(x) = 2 - x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right); f(0) = 2$.

解 不能断定. 例如,函数

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时}, \\ 2, & \text{当 } x = 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

则当 $x \neq 0$ 时有

$$f(x) - f(0) = -x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) < 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点有极大值 $f(0) = 2$. 但

$$f'(x) = \cos\frac{1}{x} - 2x\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right) \qquad (x \neq 0).$$

故在 $x = 0$ 的任意小邻域内 $f'(x)$ 都时正时负,故在 $x = 0$ 的左侧或右侧的任意小邻域内 $f(x)$ 都是振荡的.

【1426】 放 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

证明:(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 外有最小值;

(2) $f^{(n)}_{(0)}=g^{(n)}_{(0)}=0(n=1,2,\cdots)$,但 $g(x)$ 在 $x=0$ 处无极值.

作为这些函数的图形.

证 根据 1225 题的结果有

$$f^{(n)}(0)=0 \qquad (n=1,2,\cdots).$$

用归纳法可证明

$$g^{(n)}(0)=0 \qquad (n=1,2,\cdots).$$

当 $x\neq 0$ 时,

$$g'(x)=\left(\frac{2}{x^2}+1\right)e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

我们指出对任何自然数 n,均有

$$g^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad (x\neq 0),$$

其中 $P_n(t)$ 是关于 t 的多项式.我们用数学归纳法证明:

当 $n=1$ 时,命题显然.设当 $n=k$ 时,

$$g^{(k)}(x)=P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

其中 $P_k(t)$ 是关于 t 的多项式.

则
$$g^{(k+1)}(x)=\left[P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right]'$$
$$=\left[P_k\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2}{x^3}+P'_n\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]e^{-\frac{1}{x^2}}$$
$$=P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

其中 $P_{k+1}(t)$ 是关于 t 的多项式.

因此,由数学归纳法,命题得证.

再用数学归内法证明

$$g^{(n)}(0)=0 \qquad (n=1,2,\cdots),$$

事实上 $g'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x^2}}=0.$

假设当 $n=k$ 时，$g^{(k)}(0)=0$，则

$$g^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}P_k\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0,$$

因此，对任何自然数 n，都有 $g^{(n)}(0)=0$.

又 $$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad (x\neq0).$$

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值 $f(0)=0$，而

$$g'(x)=\frac{2}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad (x\neq0),$$

所以 $g'(x)>0(x\neq0)$. 因此 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单调上升，所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 处不取极值.

又 $$f''(x)=\frac{4-6x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

令 $f''(x)=0$ 得曲线的拐点为 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. $f(x)$ 为偶函数，$y=1$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

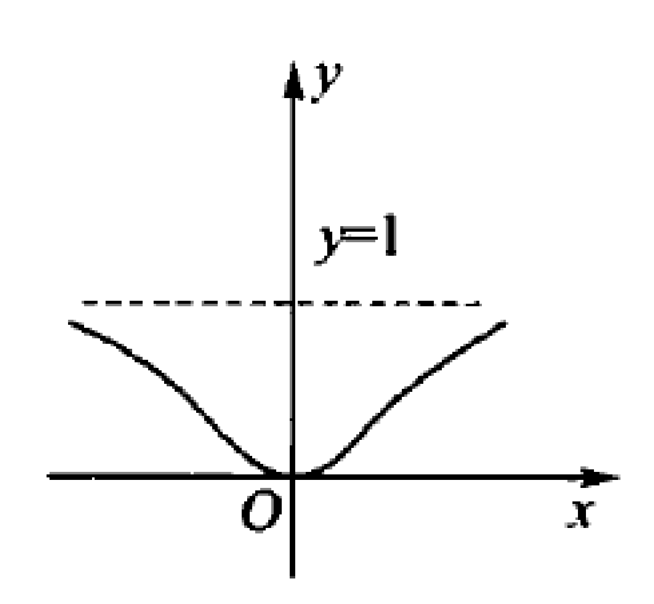
而 $$g''(x)=-\frac{2(x^2-2)}{x^5}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

令 $g''(x)=0$ 得曲线的拐点为 $x=\pm\sqrt{2}$，又当 x 经过点 $x=0$ 时，$g''(x)$ 改变符号，所以 $x=0$ 也为拐点.

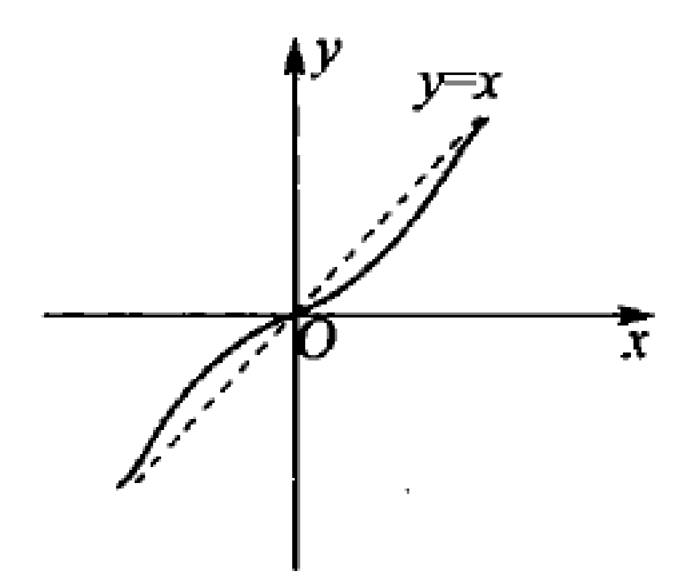
又 $$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=1,\lim_{x\to\infty}(g(x)-x)=0,$$

所以 $y=x$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线，$g(x)$ 为奇函数. $y=f(x)$

的图象如 1426 题图 1 所示. $y = g(x)$ 的图象如 1426 题图 2 所示



1426 题图 1



1426 题图 2

【1427】 研究下列函数的极值

(1) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right)$; $f(0) = 0$;

(2) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \cos\frac{1}{x}\right)$; $f(0) = 0$.

作出这些函数的图形.

解 (1) 由于 $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 1 < \sqrt{2}$.

及 $\quad e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$,

所以 $\quad f(x) > 0 = f(0) \quad (x \neq 0)$,

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有极小值 $f(0) = 0$.

当 $x > 0$ 时,

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right),$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$$

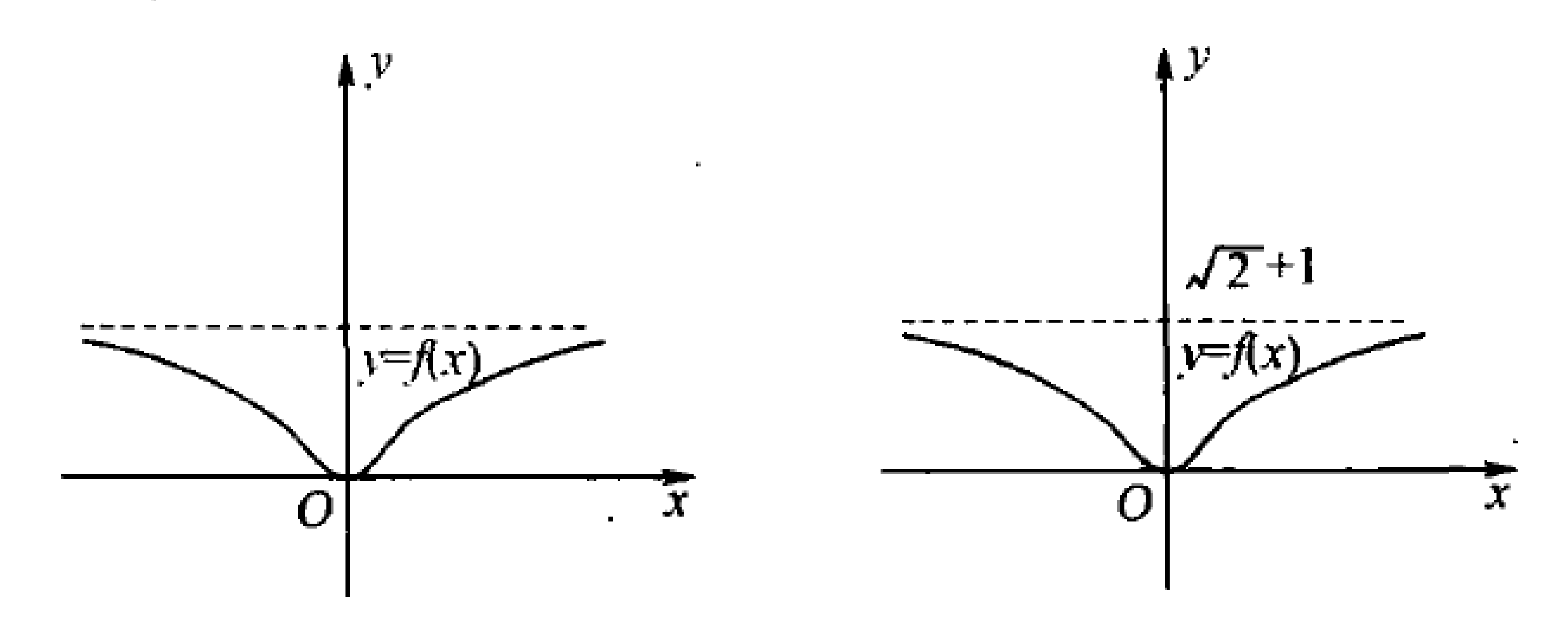
$$= \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{2}\left[1 + \sin\left(\frac{1}{x} - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

虽然在 $x_k = 2k\pi + \frac{7\pi}{4}$, $(k = 1,2,\cdots)$ 有 $f'(x_k) = 0$,但当 x 经过 x_k 时, $f'(x_k)$ 不改变符号,所以 $f(x)$ 在 x_k 不取极值. 同理 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内没有极值.

$y=f(x)$ 的图形如 1427 图 1 所示.

(2) 与(1) 一样可证,$f(x)$ 在且仅在 $x=0$ 取极小值 $f(0)=0$.

$y=f(x)$ 的图形如 1427 题图 2 所示.



1427 题图 1　　　　1427 题图 2

【1428】 若 $x\neq 0, f(x)=|x|\left(2+\cos\frac{1}{x}\right); f(0)=0$,研究此函数在点 $x=0$ 的极值,并作出此函数的图形.

解 当 $x\neq 0$ 时,恒有 $f(x)>f(0)$,故当 $x=0$ 时,有极小值 $f(0)=0$,而当 $x>0$ 时,

$$f(x)=x\left(2+\cos\frac{1}{x}\right).$$

从而
$$f'(x)=2+\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}.$$

当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调增加,故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内没有极值,而在 $(0,1)$ 内 $f(x)$ 有无穷多个极值.

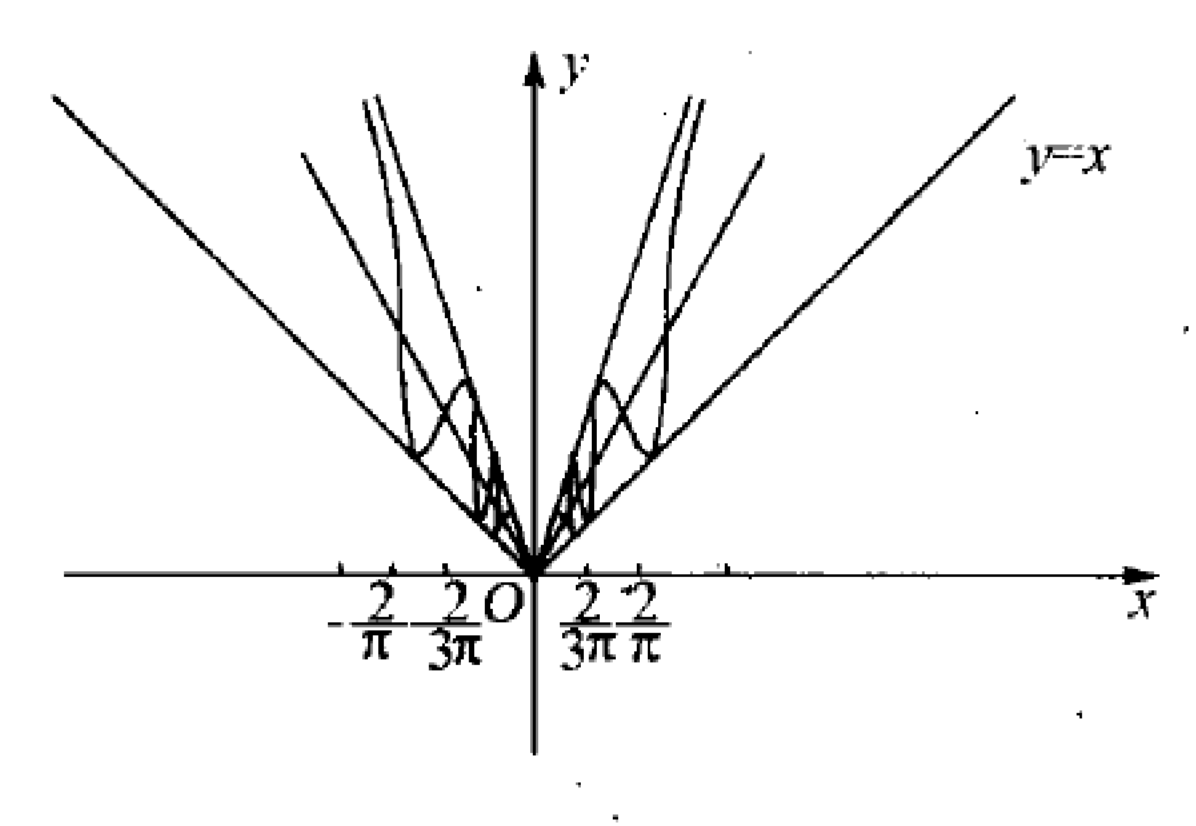
事实上,设 $x_{2k}=\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}, x_{2k+1}=\dfrac{1}{(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}}$

$k=1,2,\cdots$,

容易验证 $f'(x_{2k})=2+2k\pi+\frac{\pi}{2}>0$,

$$f'(x_{2k+1})=2-(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}<0.$$

由连续函数的介值定理，存在 $x_k^* \in (x_{2k+1}, x_{2k})$ 使得 $f'(x_k^*) = 0$. 而当 x 经过 x_k^* 时，$f'(x)$ 从负变正，故 $f(x)$ 在 x_k^* 取极小值，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有无穷多个极小值. 同样可证 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有无穷多个极大值. 函数图形关于 Oy 轴对称. 如 1428 题图所示.



1428 题图

求下列函数的极值(1429 ～ 1444).

【1429】 $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

解 $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

令 $y' = 0$，解得 $x = 1$ 或 $x = 3$，

因为

$$y'' = 6x - 12, y''|_{x=1} = -6 < 0,$$

$$y''|_{x=3} = 6 > 0,$$

所以，当 $x = 1$ 时，有极大值

$$y = 1 - 6 + 9 - 4 = 0.$$

当 $x = 3$ 时，有极小值

$$y = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 - 4 = -4.$$

【1430】 $y = 2x^3 - x^4$.

解 $y' = 4x - 4x^3$.

令 $y' = 0$，解得 $x = \pm 1$ 或 $x = 0$，

而 $y'' = 4 - 12x^2$，　$y''|_{x=-1} = 4 - 12 = -8 < 0.$

$y''|_{x=0} = 4 > 0$，　$y''|_{x=1} = 4 - 12 = -8 < 0$，

所以，当 $x = -1$ 时有极大值 $y = 1$，

当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$,

当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

【1431】 $y=x(x-1)^2(x-2)^3$.

解 $y'=(x-1)(x-2)^2(6x^2-10x+2)$.

令 $y'=0$,解得 $x=1,x=2$ 及 $x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$.

当 $x<\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ 时 $y'<0$,

当$\frac{5-\sqrt{13}}{6}<x<1$ 时 $y'>0$,

当 $1<x<\frac{5+\sqrt{13}}{6}$ 时 $y'<0$,

当$\frac{5+\sqrt{13}}{6}<x<2$ 时 $y'>0$,

当 $x>2$ 时 $y'>0$,

所以当 $x=\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ 时有极小值

$$y=\frac{(5-\sqrt{13})(1-\sqrt{13})^2(-7-\sqrt{13})^3}{6^6}.$$

当 $x=1$ 时有极大值 $y=0$,

当 $x=\frac{5+\sqrt{13}}{6}$ 时,有极小值

$$y=\frac{(5+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})^2(-7+\sqrt{13})^3}{6^6}.$$

【1432】 $y=x+\frac{1}{x}$.

解 $y'=1-\frac{1}{x^2}$.

令 $y'=0$,解得 $x=\pm1$,

又 $y''=\frac{2}{x^3},y''|_{x=-1}=-2,y''|_{x=1}=2$,

所以当 $x=-1$ 时有极大值 $y=-2$,

当 $x=1$ 时有极小值 $y=2$.

【1433】 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

解 $y'=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

令 $y'=0$,解得 $x=\pm1$.

当 $x<-1$ 时,$y'<0$,

当 $-1<x<1$ 时,$y'>0$,

当 $x>1$ 时,$y'<0$,

所以,当 $x=-1$ 时有极小值 $y=-1$,

当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

【1434】 $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$.

解 $y'=\dfrac{5x-7}{(x+1)^3}$.

令 $y'=0$,解得 $x=\dfrac{7}{5}$.

当 $-1<x<\dfrac{7}{5}$ 时,$y'<0$,

当 $x>\dfrac{7}{5}$ 时,$y'>0$,

所以,当 $x=\dfrac{7}{5}$ 时,有极小值 $y=-\dfrac{1}{24}$.

【1435】 $y=\sqrt{2x-x^2}$.

解 $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

令 $y'=0$,解得 $x=1$,因为

当 $0<x<1$ 时,$y'>0$,

当 $2>x>1$ 时,$y'<0$,

所以当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$,其次由于 $y\geqslant0$,故当 $x=0$ 及 $x=2$ 时有边界的极小值 $y=0$.

【1436】 $y=x\sqrt[3]{x-1}$.

解 $y'=\dfrac{4x-3}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$.

令 $y'=0$,得 $x=\dfrac{3}{4}$,

且导数在 $x=1$ 处不存在.

当 $x<\dfrac{3}{4}$ 时 $y'<0$,

当$\dfrac{3}{4}<x<1$ 时 $y'>0$,

当 $x>1$ 时 $y'>0$.

所以当 $x=\dfrac{3}{4}$ 时,有极小值 $y=-\dfrac{3}{8}\sqrt{2}$ 在点 $x=1$ 处,函数不取极值.

【1437】 $y=xe^{-x}$.

解 $y'=e^{-x}(1-x)$.

令 $y'=0$ 解得 $x=1$.

当 $x<1$ 时,$y'>0$,

当 $x>1$ 时,$y'<0$,

所以,当 $x=1$ 时有极大值 $y=e^{-1}$.

【1438】 $y=\sqrt{x}\ln x$.

解 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x+2)$.

令 $y'=0$,解得 $x=e^{-2}$.

当 $0<x<e^{-2}$ 时,$y'<0$,

当 $x>e^{-2}$ 时,$y'>0$,

所以当 $x=e^{-2}$ 时,有极小值 $y=-\dfrac{2}{e}$.

【1439】 $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

解 $y'=\dfrac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}$.

令 $y'=0$,解得 $x=1$ 或 $x=e^2$.

当 $0<x<1$ 时，$y'<0$，
当 $1<x<e^2$ 时，$y'>0$，
当 $x>e^2$ 时，$y'<0$，

所以当 $x=1$ 时，有极小值 $y=0$，当 $x=e^2$ 时，有极大值 $y=\frac{4}{e^2}$.

【1440】 $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$.

解 $y'=-\sin x(1+2\cos x)$，

令 $y'=0$，得 $x=k\pi$ 或 $x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}(k=0,\pm1,\cdots)$，

又 $y''=-\cos x-2\cos 2x$，

$y''|_{x=k\pi}=(-1)^{k+1}-2<0$，

$y''|_{x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{2}+1>0$，

所以，当 $x=k\pi$ 时有极大值 $y=(-1)^k+\frac{1}{2}$，

当 $x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ 时有极小值 $y=-\frac{3}{4}$.

【1441】 $y=\frac{10}{1+\sin^2 x}$.

解 当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$\sin x=0$，函数有极大值 $y=10$.

当 $x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时 $|\sin x|=1$ 函数有极小值 $y=5$.

【1442】 $y=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

解 $y'=\frac{1-x}{1+x^2}$.

令 $y'=0$，解得 $x=1$.
当 $x<1$ 时，$y'>0$，
当 $x>1$ 时，$y'<0$，

所以，当 $x=1$ 时，函数有极大值 $y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$.

【1443】 $y=e^x\sin x$.

解 $y'=e^x(\sin x+\cos x)$.

令 $y'=0$,解得

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4},$$

或 $$x=2k\pi+\frac{7\pi}{4}\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

又 $$y''=2e^x\cos x,$$

$$y''\big|_{x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}}<0,y''\big|_{x=2k\pi+\frac{7\pi}{4}}>0,$$

所以,当 $x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$ 时,有极大值 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{3\pi}{4}}(k=0,\pm1,\cdots)$,

当 $x=2k\pi+\frac{7\pi}{4}$ 时,有极小值 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{7\pi}{4}}(k=0,\pm1,\cdots)$.

【1444】 $y=|x|e^{-|x-1|}$.

解 当 $x<0$ 时

$$y=-xe^{x-1},y'=-(x+1)e^{x-1}.$$

令 $y'=0$,解得 $x=-1$. 而

当 $x<-1$ 时,$y'>0$.

当 $-1<x<0$ 时,$y'<0$,

所以当 $x=-1$ 时有极大值 $y=e^{-2}$,

又当 $0<x<1$ 时,

$$y=xe^{x-1},y'=(x+1)e^{x-1}>0,$$

所以当 $x=0$ 时,有极小值 $y=0$,

而当 $x>1$ 时,

$$y=xe^{1-x},y'=(1-x)e^{1-x}<0,$$

所以当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

求下列函数的最小值和最大值(1445 ~ 1449).

【1445】 $f(x)=2^x$ 在闭区间$[-1;5]$.

解 因为 $f(x)=2^x$ 是单调增加的函数,所以最小值

$$m=\min_{-1\leqslant x\leqslant 5}f(x)=f(-1)=\frac{1}{2},$$

$$M = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 5} f(x) = f(5) = 2^5 = 32.$$

【1446】 $f(x) = x^2 - 4x + 6$ 在闭区间[-3;10].

解 $f'(x) = 2x - 4$.

令 $f'(x) = 0$,解得 $x = 2 \in [-3,10]$.

而 $f(2) = 2, f(-3) = 9 - 4 \times (-3) + 6 = 27,$

$f(10) = 66,$

所以 $m = \min_{-3 \leqslant x \leqslant 10} f(x) = 2,$

$M = \max_{-3 \leqslant x \leqslant 10} f(x) = 66.$

【1447】 $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ 在闭区间[-10;10].

解 令 $x^2 - 3x + 2 = 0$.

解得 $x = 1 \in [-10,10]$ $x = 2 \in [-10,10]$.

因为 $f(x) \geqslant 0$,

所以 $m = \min_{-1 \leqslant x \leqslant 10} f(x) = 0.$

而当 $-10 < x < 1$ 时,

$f(x) = x^2 - 3x + 2, f'(x) = 2x - 3 < 0,$

当 $1 < x < 2$ 时,

$f(x) = -(x^2 - 3x + 2), f'(x) = -(2x - 3),$

令 $f'(x) = 0$.

解得 $x = \frac{3}{2}$.

当 $2 < x < 10$ 时,

$f(x) = x^2 - 3x + 2, f'(x) = 2x - 3 > 0,$

又 $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}, f(-10) = 132, f(10) = 72,$

所以 $M = 132.$

【1448】 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在闭区间[0.01;100].

解 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

令 $f'(x) = 0$,

解得 $x = 1 \in [0.01,100], x = -1 \notin [0.01,10]$.

又 $f(1)=2, f(0.01)=100.01,$

$f(100)=100.01,$

所以 $m=2 \quad M=100.01.$

【1449】 $f(x)=\sqrt{5-4x}$ 在闭区间[-1;1].

解 $f'(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{5-4x}}<0,$

所以,$f(x)$ 在[-1,1]上是单调减少的,故

$$m=f(1)=1 \quad M=f(-1)=3.$$

求下列函数的下确界(inf)和上确界(sup)(1450 ~ 1453).

【1450】 $f(x)=xe^{-0.01x}$ 在区间$(0,+\infty)$.

解 当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f(x)>0$,

而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,故

$$\inf_{0<x<+\infty} f(x)=0,$$

又 $f'(x)=(1-0.01x)e^{-0.01x},$

令 $f'(x)=0,$

得 $x=100,$

当 $0<x<100$ 时,$f'(x)>0,$

当 $100<x<+\infty$ 时,$f'(x)<0,$

故 $$\sup_{0<x<+\infty} f(x)=f(100)=\frac{100}{e}.$$

【1451】 $f(x)=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$,在区间$(0,+\infty)$.

解 因为 $f'(x)=-\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}<0 \quad (x\in 10,+\infty)),$

故 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内单调减少.

所以 $$\sup_{0<x<+\infty} f(x)=f(0)=1,$$

$$\inf_{0<x<+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

【1452】 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ 在区间$(0,+\infty)$.

解　$f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，

所以　$\inf\limits_{0<x<+\infty}f(x)=0.$

又　$f'(x)=\dfrac{2x(1-2x^2-x^4)}{(1+x^4)^2}$，令 $f'(x)=0$，

解得　$x=-\sqrt{\sqrt{2}-1}\notin(0,+\infty)$，$x=0$，

及　$x=\sqrt{\sqrt{2}-1}\in[0,+\infty)$，

而　$f(0)=1$，　$f\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})$，

所以　$\sup\limits_{0<x<+\infty}f(x)=f\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2}).$

【1453】　$f(x)=e^{-x^2}\cos x^2$　　在区间$(-\infty,+\infty)$.

解　$f'(x)=-2xe^{-x^2}(\cos x^2+\sin x^2)$.

令 $f'(x)=0$. 得 $x=0$. 及

$$x=\pm\sqrt{2k\pi+\frac{3\pi}{4}},$$

$$x=\pm\sqrt{2k\pi+\frac{7\pi}{4}}\qquad(k=0,1,2,\cdots),$$

$f(x)$ 在 $\pm\sqrt{\dfrac{3\pi}{4}}$ 取最小值，在 $x=0$ 取最大值，

所以　$\inf f(x)=f\left(\pm\sqrt{\dfrac{3\pi}{4}}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$，

$\sup f(x)=f(0)=1.$

【1454】　确定函数 $f(\xi)=\dfrac{1+\xi}{3+\xi^2}$ 在区间 $x<\xi<+\infty$ 内的下确界与上确界，作出函数 $M(x)=\sup\limits_{x<\xi<+\infty}f(\xi)$ 和 $m(x)=\inf\limits_{x<\xi<+\infty}f(\xi)$ 的图形.

解　因为 $f'(\xi)=\dfrac{3-2\xi-\xi^2}{(3+\xi^2)}$，

令 $f'(\xi)=0$. 得 $\xi=-3$，$\xi=1$，

当 $-\infty<\xi<-3$ 时，$f'(\xi)<0$，

当 $-3<\xi<1$ 时，$f'(\xi)>0$，

当 $1<\xi<+\infty$ 时，$f'(\xi)<0$.

所以 $f(-3)$ 为 $f(\xi)$ 的极小值，$f(1)$ 为 $f(\xi)$ 的极大值，又

$$\lim_{\xi\to-\infty} f(\xi)=0.$$

于是，当 $-\infty<x<-3$ 时，$m(x)=f(-3)=-\frac{1}{6}$.

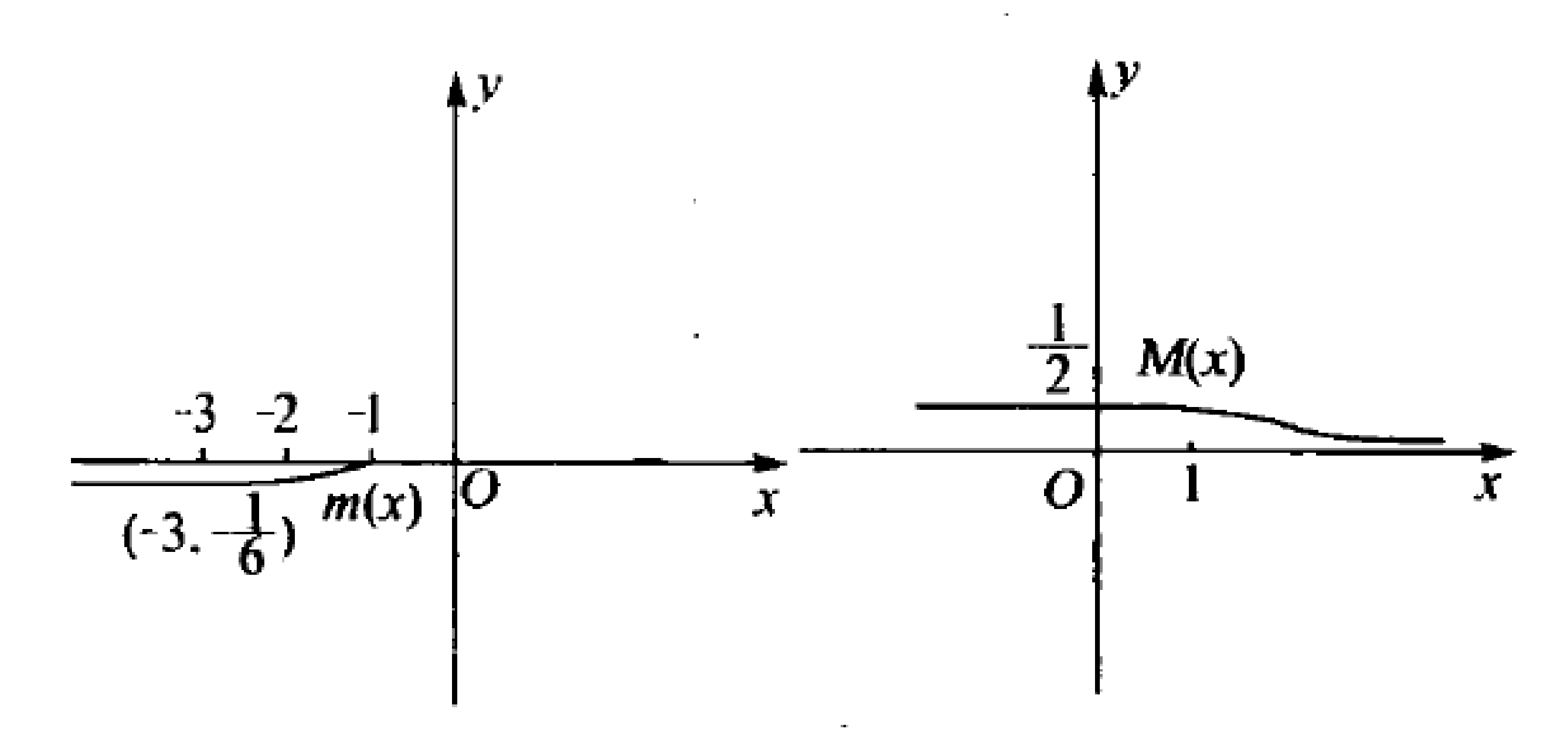
当 $-3<x\leqslant-1$ 时，$m(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$.

当 $-1<x<+\infty$ 时，$m(x)=0$.

当 $-\infty<x\leqslant1$ 时，$M(x)=f(1)=\frac{1}{2}$.

当 $1<x<+\infty$ 时，$M(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$.

$m(x)$ 及 $M(x)$ 的图形分别为 1454 题图 1 及图 2



1454 题图 1　　　　1454 题图 2

【1454.1】 设

$$M_k=\sup_x|f^{(k)}(x)|,k=0,1,2\cdots$$

若 $f(x)=e^{-x^2}$，求 M_0，M_1 和 M_2.

解 $f(x)=e^{-x^2}\leqslant1=f(0)$，所以 $M_0=1$，而

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$，$f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2}$，

$f'''(x)=4x(3-2x^2)e^{-x^2}$，

当 $-\infty<x<-\sqrt{\frac{1}{2}}$ 时，$f''(x)>0$，$f'(x)$ 增加.

当$-\sqrt{\frac{1}{2}}<x<\sqrt{\frac{1}{2}}$时，$f''(x)<0$，$f'(x)$减少.

当$\sqrt{\frac{1}{2}}<x<+\infty$时，$f''(x)>0$，$f'(x)$增加.

且
$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}(-2xe^{-x^2})=0.$$

$$f'\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{\frac{2}{e}},$$

所以
$$M_1=f'\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{\frac{2}{e}},$$

同样，通过讨论$f'''(x)$可得

$$M_2=f''\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=4e^{-\frac{3}{2}}.$$

【1455】 求下列各序列的最大项：

(1) $\frac{n^{10}}{2^n}$　$(n=1,2,\cdots)$;

(2) $\frac{\sqrt{n}}{n+10000}$　$(n=1,2,\cdots)$;

(3) $\sqrt[n]{n}$　$(n=1,2,\cdots)$.

解 (1) 设$f(x)=\frac{x^{10}}{2^x}$.

则
$$f'(x)=\frac{x^9(10-x\ln2)}{2^x},$$

令$f'(x)=0$，解得$x=\frac{10}{\ln2}$.

当$0<x<\frac{10}{\ln2}$时，$f'(x)>0$，

当$\frac{10}{\ln2}<x<+\infty$时，$f'(x)<0$，

从而$f(x)$在$x=\frac{10}{\ln2}$处取到在$(0,+\infty)$内的最大值.而$\left[\frac{10}{\ln2}\right]=14$.所以最大项

$$\max_n\left\{\frac{n^{10}}{2^n}\right\}=\max\left\{\frac{13^{10}}{2^{13}},\frac{14^{10}}{2^{14}},\frac{15^{10}}{2^{15}}\right\}=\frac{14^{10}}{2^{14}}.$$

(2) 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+10000}$

则
$$f'(x)=\frac{10000-x}{2\sqrt{x}(x+10000)^2}.$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=10000$. 而当 $0<x<10000$ 时，$f'(x)>0$.

当 $10000<x<+\infty$ 时，$f'(x)<0$. 所以，$f(x)$ 在 $x=10000$ 处取到在 $(0,+\infty)$ 内的最大值. 故最大项为

$$\max_n\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+10000}\right\}=f(10000)=\frac{\sqrt{10000}}{20000}=\frac{1}{200}.$$

(3) 设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}\quad(x>0)$,

则
$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\mathrm{e}$.

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$；当 $\mathrm{e}<x<+\infty$ 时 $f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处取到在 $(0,+\infty)$ 内的最大值. 故最大项为

$$\max_n\{\sqrt[n]{n}\}=\max\{\sqrt[3]{3},\sqrt{2}\}=\sqrt[3]{3}.$$

【1456】 证明下列不等式：

(1) $|3x-x^3|\leqslant 2\qquad$ 当 $|x|\leqslant 2$;

(2) $\dfrac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1\qquad$ 若 $0\leqslant x\leqslant 1$ 且 $p>1$;

(3) $x^m(a-x)^n\leqslant\dfrac{m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$

若 $m>0,n>0$ 且 $0\leqslant x\leqslant a$;

(4) $\dfrac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}}\leqslant\sqrt[n]{x^n+a^n}\leqslant x+a(x>0,a>0,n>1)$;

(5) $|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

证 (1) 设 $f(x)=3x-x^3$.

则
$$f'(x)=3(1-x^2),$$

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\pm 1\in[-2,2]$,

故 $$\min_{-2\leqslant x\leqslant 2} f(x) = \min\{f(-2), f(-1), f(1), f(2)\} = f(-1) = -2,$$

$$\max_{-2\leqslant x\leqslant 2} f(x) = \max\{f(-2), f(-1), f(1), f(2)\} = f(1) = 2,$$

即当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，$-2\leqslant f(x)\leqslant 2$. 因此

$$|3x - x^3| \leqslant 2.$$

(2) 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$.

则 $$f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1},$$

令 $f'(x) = 0$，解得 $x = \frac{1}{2} \in [0,1]$，

故 $$\min_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) = \min\left\{f(0), f(\frac{1}{2}), f(1)\right\} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}},$$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) = \max\left\{f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right\} = 1.$$

因此，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1.$$

(3) 设 $f(x) = x^m(a-x)^n$.

则 $$f'(x) = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma - (m+n)x],$$

令 $f'(x) = 0$ 得

$$x = \frac{ma}{m+n} \in [0,a],$$

所以 $$\max_{0\leqslant x\leqslant a} f(x) = \max\left\{f(0), f\left(\frac{ma}{m+n}\right), f(a)\right\} = f\left(\frac{ma}{m+n}\right) = \left(\frac{ma}{m+n}\right)^m \left(a - \frac{ma}{m+n}\right)^n = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}.$$

因此，当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，

$$x^m(a-x)^n \leqslant \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}.$$

(4) 设 $f(x)=\dfrac{(x^n+a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a}$.

则 $$f'(x)=\frac{a(x^n+a^n)^{\frac{1}{n}}(x^{n-1}-a^{n-1})}{(x+a)^2(x^n+a^n)},$$

令 $f'(x)=0$,得 $x=a$,

当 $0<x<a$ 时,$f'(x)<0$,

当 $a<x<+\infty$ 时,$f'(x)>0$,

所以 $f(a)=\dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最小值,又

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=1,$$

所以 $$\sup_{0<x<+\infty}f(x)=1,$$

即当 $0<x<+\infty$ 时,

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}\leqslant\frac{(x^n+a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a}\leqslant 1.$$

由于 $x+a>0$,因此

$$\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}}\leqslant\sqrt[n]{x^n+a^n}\leqslant x+a.$$

(5) $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$,

其中 $$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

所以 $$|a\sin x+b\cos x|=\sqrt{a^2+b^2}\,|\sin(x+\varphi)|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}.$$

【1456.1】 证明不等式:

$$\frac{2}{3}\leqslant\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\leqslant 2\qquad 当-\infty<x<+\infty.$$

证 设 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

则 $$f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2},$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm 1$.

当 $-\infty < x < -1$ 时，$f'(x) > 0$，

当 $-1 < x < 1$ 时，$f'(x) < 0$，

当 $1 < x < +\infty$ 时 $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处有极大值 $f(-1) = 2$；在 $x = 1$ 处有极小值 $f(1) = \frac{2}{3}$，又

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1,$$

所以 $$\sup_{-\infty<x<+\infty} f(x) = 2,\quad \inf_{-\infty<x<+\infty} f(x) = \frac{2}{3},$$

所以 $$\frac{2}{3} \leqslant \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \leqslant 2.$$

【1457】 求多项式

$$P(x) = x(x-1)^2(x+2),$$

在闭区间$[-2,1]$上"与零的差"，亦即求出

$$E_P = \sup_{-2\leqslant x\leqslant 1} |P(x)|.$$

解 $P'(x) = 2(x-1)(2x^2+2x-1)$.

令 $P'(x) = 0$，解得

$$x = 1 \in [-2,1] \qquad x = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \in [-2,1],$$

所以 $$E_p = \max\left\{|P(-2)|, |P(1)|, \left|P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right|, \left|P\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right|\right\}$$

$$= \left|P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \frac{9+6\sqrt{3}}{4}.$$

【1458】 应怎样选择系数 q，使多项式

$$P(x) = x^2 + q,$$

在闭区间$[-1,1]$上与零的差最小，亦即

$$E_P = \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P(x)| = \min.$$

解 $P'(x) = 2x$.

令 $P'(x) = 0$，得 $x = 0$，

所以 $$E_p=\max\{|P(-1)|,|P(0)|,|P(1)|\}$$
$$=\max\{|1+q|,|q|\}.$$

当 $|q|=|1+q|$ 时，E_p 最小，解之得 $q=-\frac{1}{2}$.

【1459】 数

$$\Delta=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|,$$

称作函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的绝对差. 求函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=x^3$ 在闭区间 $[0,1]$ 的绝对差.

【1459】 解 设 $F(x)=f(x)-g(x)=x^2-x^3$.

则 $$F'(x)=2x-3x^2.$$

令 $F'(x)=0$，解之得

$$x=0\in[0,1] \qquad 及 \qquad x=\frac{2}{3}\in[0,1].$$

所以 $$\Delta=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|F(x)|$$
$$=\max\left\{|F(0)|,\left|F\left(\frac{2}{3}\right)\right|,|F(1)|\right\}$$
$$=\left|\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right|=\frac{4}{27}.$$

【1460】 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上用线性函数 $g(x)=(x_1+x_2)x+b$ 近似地替代函数 $f(x)=x^2$，使得函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的绝对差(参阅前题)最小，并求出这个最小的绝对差.

解 设

$$F(x)=f(x)-g(x)=x^2-[(x_1+x_2)x+b].$$

则 $$F'(x)=2x-(x_1+x_2).$$

令 $F'(x)=0$ 得 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$，于是

$$\Delta=\max\left\{|F(x_1)|,|F(x_2)|,\left|F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right|\right\}$$
$$=\max\left\{|x_1x_2+b|,\left|\frac{(x_1+x_2)^2}{4}+b\right|\right\}.$$

要 Δ 最小，需

$$|x_1+x_2+b| = \left|\frac{(x_1+x_2)^2}{4}+b\right|,$$

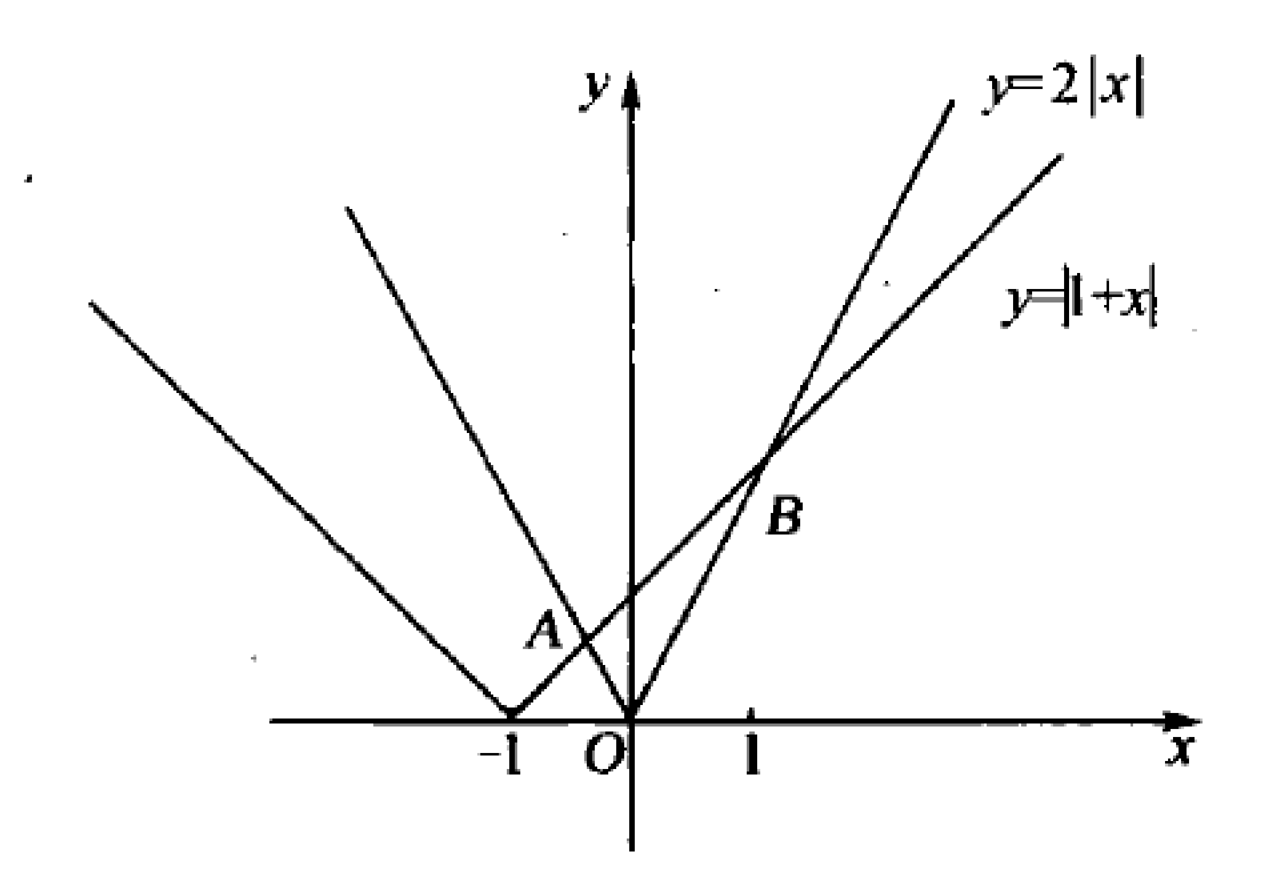
解之得 $b=-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2)$.

此时 $g(x)=(x_1+x_2)x-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2)$,

而最小的绝对差为 $\Delta=\frac{1}{8}(x_1-x_2)^2$.

【1461】 求函数 $f(x)=\max\{2|x|,|1+x|\}$ 的最小值.

解 $y=2|x|$ 及 $y=|1+x|$ 的图形如1461题图所示,它们的交点为 $A\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$,$B(1,2)$.



1461 题图

所以

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 1\leqslant x<+\infty,\\ 1+x, & -\frac{1}{3}\leqslant x<1,\\ -2x, & -\infty<x\leqslant-\frac{1}{3},\end{cases}$$

因此,$f(x)$ 的极小值为 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$.

确定下列各方程的实根数目,并确定这些根所在的范围,设(1462～1469).

【1462】 $x^3-6x^2+9x-10=0$.

解 设 $f(x)=x^3-6x^2+9x-10$.

则 $f(x)$ 为$(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.且有

$$f'(x)=3x^2-12x+9,$$

令 $f'(x)=0$ 解之得 $x=1$,及 $x=3$.

当 $-\infty<x<1$ 时,$f'(x)>0$,且

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,f(1)=-6<0.$$

故在$(-\infty,1)$ 内,方程无实根.

当 $1<x<3$ 时,$f'(x)<0$,所以在$(1,3)$ 内方程也无实根.

当 $3<x<+\infty$ 时,$f'(x)>0$.且

$$f(3)=-10<0,\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

故在$(3,+\infty)$ 内方程有且仅有一实根.

总之,方程 $x^3-6x^2+9x-10=0$ 有且仅有一实根,这一实根在$(3,+\infty)$ 内.

【1463】 $x^3-3x^2-9x+h=0$.

解 设 $f(x)=x^3-3x^2-9x+h$.

则 $$f'(x)=3x^2-6x-9,$$

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=-1$,及 $x=3$.

由于 $$f(-1)=5+h,f(3)=-27+h,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

故当 $h<-5$ 时,

$$f(-1)<0,f(3)<0,$$

且,当 $x\in(-\infty,-1)$ 时,$f'(x)>0$,

当 $x\in(-1,3)$ 时,$f'(x)<0$,

当 $x\in(3,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,因此,方程有且仅有一实根位于$(3,+\infty)$ 内.

当 $-5<h<27$ 时,$f(-1)>0$,$f(3)<0$,$f'(x)$ 的符号变化同上.

于是,方程有三个实根分别位于$(-\infty,-1)$,$(-1,3)$ 及$(3,+\infty)$ 内;

当 $h > 27$ 时 $f(3) > 0, f(-1) > 0$.

因此,方程有且仅有一实根,这一实根位于 $(-\infty, -1)$ 内;

当 $h = -5$ 时,方程有一个二重实根 $x = -1$ 及另外一个实根位于 $(3, +\infty)$ 内;

当 $h = 27$ 时,方程有一个二重实根 $x = 3$ 及另外一实根位于 $(-\infty, -1)$ 内.

【1464】 $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$.

解 设 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$.

则
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12 = 12(x-1)^2(x+1).$$

令 $f'(x) = 0$,得驻点 $x = \pm 1$,

由于
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$
$$f(-1) = -31 < 0, f(1) = -15 < 0,$$

并且,当 $x \in (-\infty, -1)$ 时,$f'(x) < 0$,

当 $x \in (-1, +\infty)$ 时,$f'(x) > 0$,

因此,方程有两实根.分别位于 $(-\infty, -1)$ 及 $(-1, +\infty)$ 内.

【1465】 $x^5 - 5x = a$.

解 设 $f(x) = x^5 - 5x - a$.

则
$$f'(x) = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 + 1)(x^2 - 1).$$

令 $f'(x) = 0$,得驻点 $x = \pm 1$.

由于
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$
$$f(-1) = 4 - a, f(1) = -4 - a.$$

当 $-\infty < x < -1$ 时,$f'(x) > 0$,

当 $-1 < x < 1$ 时,$f'(x) < 0$,

当 $1 < x < +\infty$ 时,$f'(x) > 0$,

故当 $a < -4$ 时 $f(-1) > 0, f(1) > 0$,

因此,方程有且仅有一实根,这一实根位于 $(-\infty, -1)$ 内.

当 $-4 < a < 4$ 时,
$$f(-1) > 0, f(1) < 0.$$

此时,方程有三个实根,它们分别位于$(-\infty,-1)$、$(-1,1)$及$(1,+\infty)$内;

当$a>4$时,

$$f(-1)<0, f(-1)<0$$

因此,方程有且仅有一实根,这一实根位于$(1,+\infty)$内.

【1466】 $\ln x = kx$.

解 当$k=0$时,方程显然仅有一实根$x=1$,因此,不妨设$k>0$,令

$$f(x)=\ln x - kx \qquad (x>0).$$

则
$$f'(x)=\frac{1}{x}-k,$$

令$f'(x)=0$得驻点为

$$x=\frac{1}{k} \qquad (k>0).$$

由于
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,$$

故曲线始终呈凹状.

当$x\in\left(0,\frac{1}{k}\right)$时,$f'(x)>0$,

当$x\in\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$时,$f'(x)<0$,

又
$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\ln\frac{1}{k}-1,$$

故当$k>\frac{1}{\mathrm{e}}$时,$f\left(\frac{1}{k}\right)<0$ 此时方程无根.

当$0<k<\frac{1}{\mathrm{e}}$时,$f\left(\frac{1}{k}\right)>0$,

而
$$\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,$$

因此,方程有两个实根,分别位于$\left(0,\frac{1}{k}\right)$和$\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$内;

当$-\infty<k<0$时,

$$\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty, f(1)=-k>0,$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-k>0,$$

因此,方程有且仅有一实根位于(0,1)内.

【1467】 $e^x=ax^2$.

解　当$a\leqslant 0$时,方程显然无解.故不妨设$a>0$对于函数$f(x)=e^x-ax^2$有$f(0)=1>0$及$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,所以在$(-\infty,0)$内方程$f(x)=0$至少有一实根.

又当$-\infty<x<0$时,

$$f'(x)=e^x-2ax>0,$$

所以,$f(x)=0$在$(-\infty,0)$内只有唯一的实根.

当$x>0$时,方程$e^x=ax^2$可转化为方程

$$x=\ln a+2\ln x\qquad(x>0,a>0).$$

设　$$g(x)=x-\ln a-2\ln x,$$

则　$$g'(x)=1-\frac{2}{x},$$

令$g'(x)=0$得$x=2$,

当$0<x<2$时,$g'(x)<0$,

当$2<x<+\infty$时,$g'(x)>0$,

所以$g(2)=\ln\frac{e^2}{4a}$为极小值,又

$$\lim_{x\to+0}g(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty,$$

因此,当$g(2)>0$,即$0<a<\frac{e^2}{4}$时.$g(x)=0$无根.

当$g(2)=0$时,即$a=\frac{e^2}{4}$时,$g(x)=0$有唯一的根.

当$g(2)<0$时,$g(x)=0$有两个根,它们分别位于(0,2)及$(2,+\infty)$内.

综上所述,方程$e^x=ax^2$的实根情况如下:

当$a\leqslant 0$时,无实根.

当$0<a<\frac{e^2}{4}$时,有唯一实根.它位于$(-\infty,0)$内.

当 $a=\dfrac{e^2}{4}$ 时，有两个实根，一个根为 2，另一根位于 $(-\infty,0)$ 内.

当 $\dfrac{e^2}{4}<a<+\infty$ 时，有三个实根，分别位于 $(-\infty,0)$，$(0,2)$ 及 $(2,+\infty)$ 内.

【1468】 $\sin^3 x\cdot\cos x=a, 0\leqslant x\leqslant\pi$.

解 当 $a=0$ 时，方程显然有三个实根. $x=0,\dfrac{\pi}{2},\pi$.

因此，不妨设 $a\neq 0$. 令 $f(x)=\sin^3 x\cos^2 x-a$.

则
$$f'(x)=3\sin^2 x\cos^2 x-\sin^4 x,$$

令 $f'(x)=0$ 得 $(0,\pi)$ 内的驻点为 $x=\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}$.

由于
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{16}-a,$$
$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{16}-a,$$
$$f(0)=f(\pi)=-a.$$

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$，

所以，当 $0<|a|<\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$ 时，方程有两个实根位于 $(0,\pi)$ 内.

当 $|a|>\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$ 时，方程无实根.

【1469】 $\mathrm{ch}x=kx$.

解 设 $f(x)=\mathrm{ch}x-kx$.

则
$$f'(x)=\mathrm{sh}x-k,$$

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 x_0. 它满足 $k=\mathrm{sh}x_0$.

而 $f''(x)=\mathrm{ch}x>0$，故曲线图形呈凹状，且在 $x=x_0$ 取到最小值，显然有

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$，因此，我们只需考虑 $f(x_0)$ 的符号. 而

$$f(x_0) = \mathrm{ch}x_0 - kx_0 = \mathrm{ch}x_0 - x_0\mathrm{sh}x_0.$$

先设 $k > 0$，则 $x_0 > 0$，则引进辅助函数

$$g(x) = \mathrm{ch}x - x\mathrm{sh}x.$$

方程 $g(x) = 0$，即 $c\mathrm{th}x = x$ 的有唯一正根 $\eta \approx 1.2$.

事实上，由于

$$g'(x) = -x\mathrm{ch}x < 0 \qquad (x > 0).$$

故 $g(x)$ 在$[0, +\infty)$ 上严格单调下降，且

$$g(0) = 1 > 0, \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty,$$

故 $g(x) = 0$ 在$[0, +\infty)$ 上有唯一正根 η.

若 $k > \mathrm{sh}\eta$. 即 $\mathrm{sh}x_0 > \mathrm{sh}\eta$. 由于 $\mathrm{sh}x$ 是严格增加的，故必有 $x_0 > \eta$，从而，由 $g(x)$ 的单调递减性有

$$f(x_0) = \mathrm{ch}x_0 - x_0\mathrm{sh}x_0 < \mathrm{ch}\eta - \eta\mathrm{sh}\eta = 0,$$

因此，方程有两个实根. 又由于

$$f(0) = 1 > 0,$$

$$f(\eta) = \mathrm{ch}\eta - k\eta < \mathrm{ch}\eta - \eta\mathrm{sh}\eta = 0.$$

故两根分别位于$(0, \eta)$，$(\eta, +\infty)$ 内.

若 $k = \mathrm{sh}\eta$，则 $\mathrm{sh}x_0 = \mathrm{sh}\eta$. 从而 $x_0 = \eta$，因此 $f(x_0) = 0$，此时方程 $f(x) = 0$ 恰有一实根 x_0.

若 $0 < k < \mathrm{sh}\eta$，则 $\mathrm{sh}x_0 < \mathrm{sh}\eta$. 从而 $x_0 < \eta$. 因此

$$f(x_0) = \mathrm{ch}x_0 - x_0\mathrm{sh}x_0 > \mathrm{ch}\eta - \eta\mathrm{sh}\eta = 0,$$

故方程无实根.

若 $k = 0$，显然方程 $f(x) = 0$ 无实根.

若 $k < 0$，则可令 $x = -t$，于是原方程变为

$$\mathrm{ch}t = -kt \qquad (-k > 0).$$

根据上面的讨论，可知当 $-k > \mathrm{sh}\eta$ 时，原方程有两根，分位于 $(-\eta, 0)$ 及$(-\infty, -\eta)$ 内.

当 $-k = \mathrm{sh}\eta$ 时，原方程有唯一的实根 $-\eta$.

当 $0 < -k < \mathrm{sh}\eta$ 时，原方程无实根.

综上所述,我们有

若 $|k|>\operatorname{sh}\eta$,方程有两实根.

若 $|k|=\operatorname{sh}\eta$,方程只有一实根.

若 $|k|<\operatorname{sh}\eta$,方程无实根.

【1470】 问在什么条件下方程

$$x^3+px+q=0,$$

有:(1) 一个实根;(2) 三个实根;

在平面(p,q)上描绘出相应的域.

解 设 $f(x)=x^3+px+q$.

则 $$f'(x)=3x^2+p.$$

若 $p\geqslant 0$,则 $f'(x)>0$ $(x\neq 0)$,故 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内严格增加,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,故 $f(x)=0$ 有唯一实根.

若 $p<0$,令 $f'(x)=0$,解得 $x_1=-\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$,$x_2=\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$,

$f(x)$ 在$(-\infty,x_1)$和$[x_2,+\infty)$上严格增加.而在$[x_1,x_2]$上 $f(x)$ 严格减小

因此,若 $f(x_1)\cdot f(x_2)>0$,则方程 $f(x)=0$ 仅有一个实根.

若 $f(x_1)>0$,$f(x_2)<0$,则方程 $f(x)=0$ 有三个实根.

由于 $$f(x_1)=\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}-p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q,$$

$$f(x_2)=-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q.$$

故 $f(x_1)f(x_2)>0$ 等价于$\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}>0$.

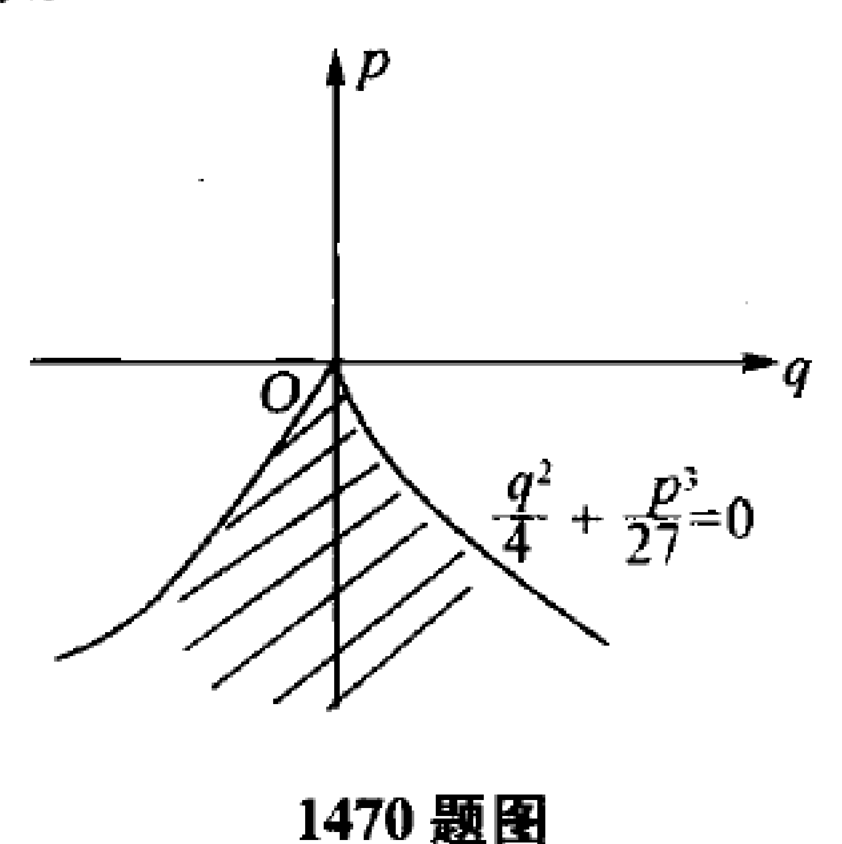
此即方程仅有一实根的条件($p\geqslant 0$ 的情形可合并到此条件中),

若$\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}<0$,则方程有三个实根.

若$\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}=0$,则方程有一个二重实根及一个单实根.此时,

也可认为方程有三个实根.

如 1470 图所示.



1470 题图

曲线$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$的下方(含曲线)是方程有三个实根的$(p,q)$域,以阴影部分表示.而曲线的上方则是方程仅有一实根的(p,q)域,图中非阴影部分.

§12. 依据函数的特征点作函数图形

为了作出函数 $y=f(x)$ 的图形,必须:

(1) 确定这个函数的存在域并研究函数在边界点上的性质;

(2) 查明图形的对称性与周期性;

(3) 求出函数的不连续点与连续区间;

(4) 确定函数零点与同号区间;

(5) 求出极值点并查明函数递增和递减的区间;

(6) 确定拐点及函数图形凸凹的区间;

(7) 如果有渐近线存在,则求出渐近线;

(8) 指出函数图形的各种特性,个别情况下可简化总图.

标有(*)号的习题中,要近似地求出拐点.

作出下列各函数的图形(1471 ~ 1530).

【1471】 $y=3x-x^3$.

解 $y'=3-3x^2$,令 $y'=0$ 得 $x=\pm 1$,$y''=-6x$,令 $y''=$

0 得 $x=0$.

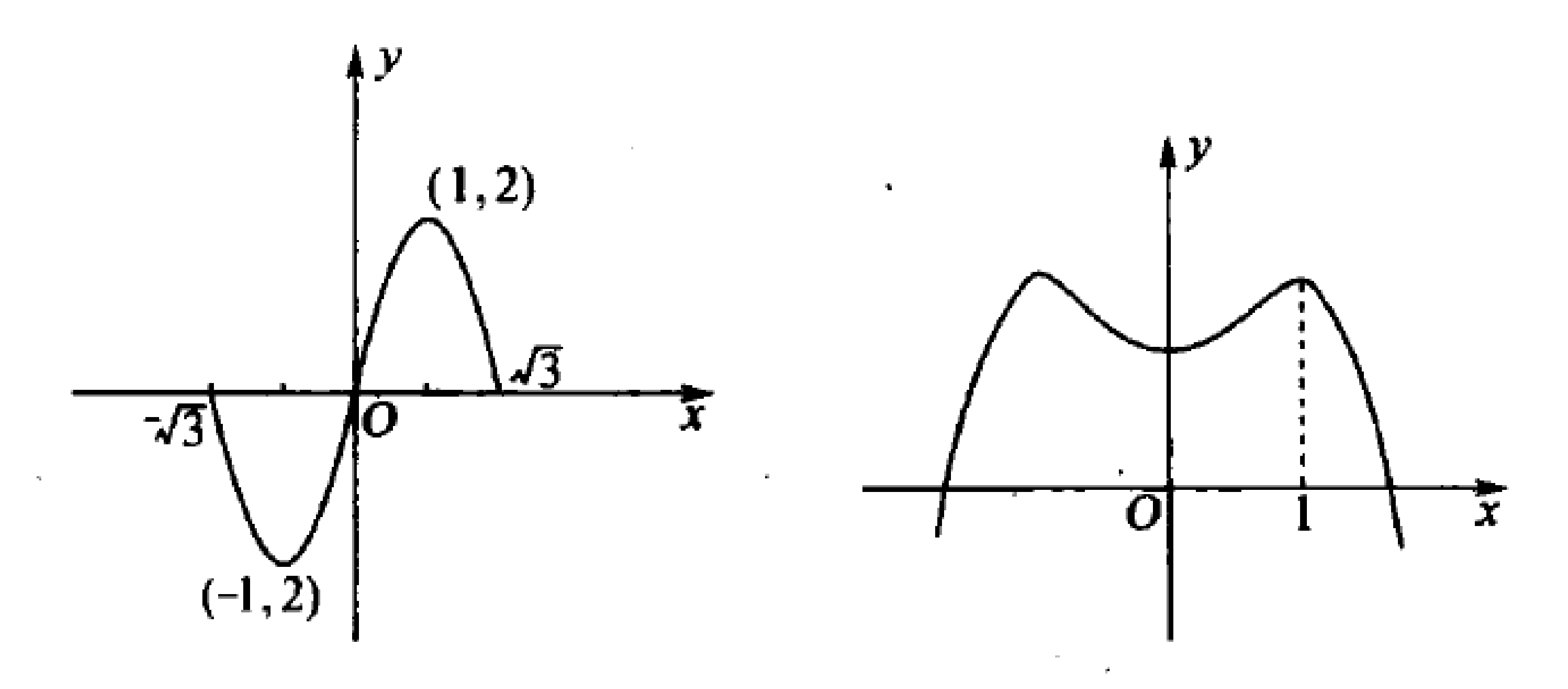
列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘⌣	极小值	↗⌣	拐点	↗⌢	极大值	↘⌢

$$y\big|_{x=-1}=-2;\ y\big|_{x=1}=2.$$

当 $x=0,\pm\sqrt{3}$ 时, $y=0$.

图形关于原点对称,如 1471 题图所示.



1471 题图　　1472 题图

注:"↗"表示单调增加,"↘"表示单调减小,"⌣"表示凹,"⌢"表示凸.

【1472】 $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$

解 $y'=2x-2x^3$.

令 $y'=0$ 得 $x=0$ 及 $x=\pm 1$,

$$y''=2-6x^2.$$

令 $y''=0$ 得 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 图形关于 Oy 轴对称.

当 $x=\pm\sqrt{1+\sqrt{3}}\approx\pm 1.65$ 时, $y=0$.

列表

x	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
y'	−	0	+	+	+	0	−
y''	+	+	+	0	−	−	−
y	↘⌣	极小值	↗⌣	拐点	↗⌢	极大值	↘⌢

当 $x=0$ 时，$y=1$；

当 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，$y=\frac{23}{18}$；

当 $x=\pm1$ 时，$y=\frac{3}{2}$.

如 1472 题图所示

【1473】 $y=(x+1)(x-2)^2$.

解 $y'=3x(x-2)$.

令 $y'=0$ 得 $x=0$，及 $x=2$，

$y''=6x-6$.

令 $y''=0$ 得 $x=1$.

列表

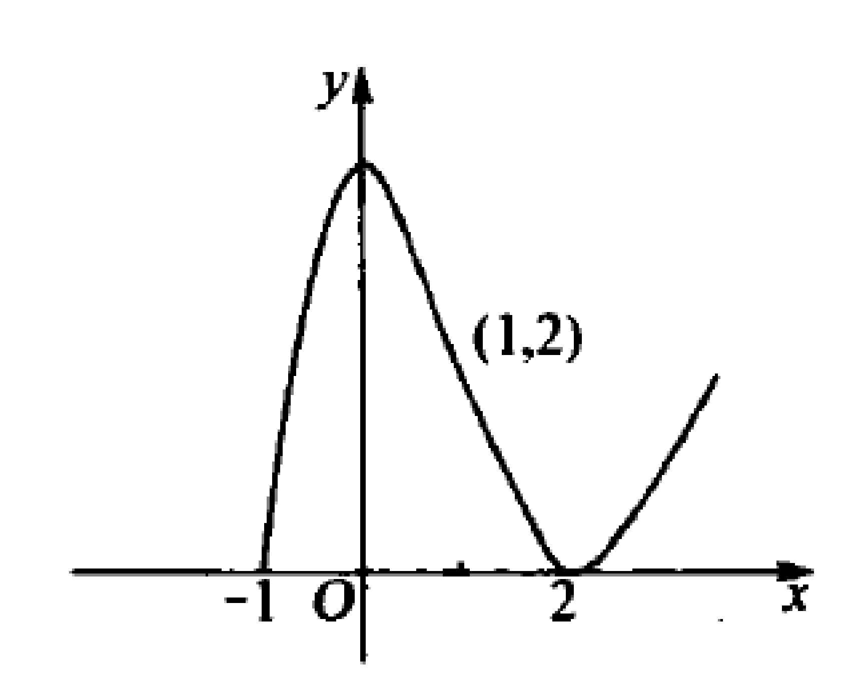
x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗⌢	极大值	↘⌢	拐点	↘⌣	极小值	↗⌣

当 $x=0$ 时，$y=4$；当 $x=1$ 时，$y=2$；

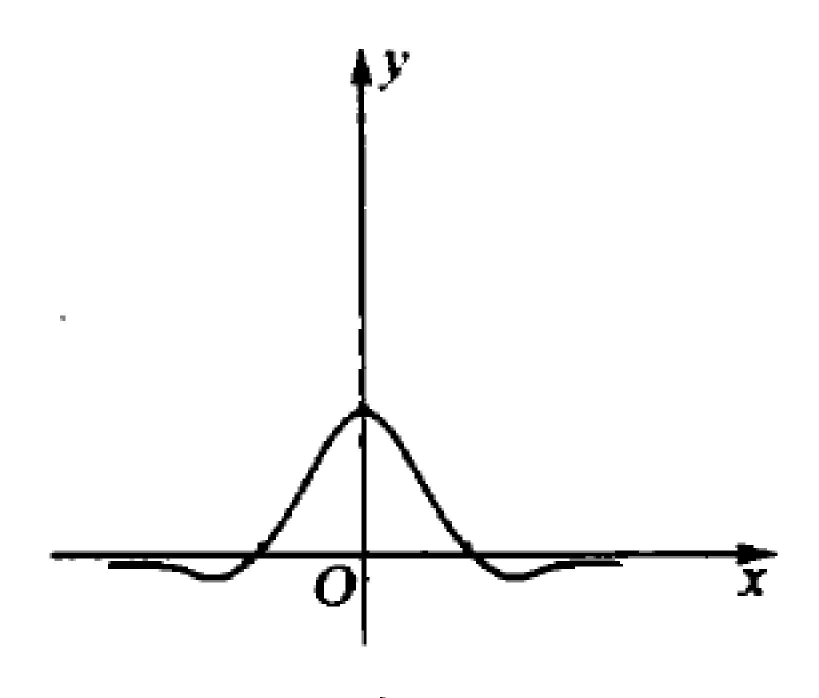
当 $x=-1$，或 2 时，$y=0$. 如 1473 题图所示.

【1474*】 $y=\frac{2-x^2}{1+x^4}$.

解 图形关于 Oy 轴对称



1473 题图



1474 题图

$$y' = \frac{2x(x^4 - 4x^2 - 1)}{(1 + x^4)^2}.$$

令 $y' = 0$,得 $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{2+\sqrt{5}} \approx \pm 2.05$,

$$y'' = -\frac{2(3x^8 - 20x^6 - 12x^4 + 12x^2 + 1)}{(1 + x^4)^3}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm 2.67$ 及 ± 0.77. 经判别知它们为拐点. 又

$$y''|_{x=0} = -2 < 0.$$

故此时有极大值 $y = 2$,

$$y''|_{x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}} > 0.$$

故有极小值 $y = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

又 $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$,故 $y = 0$ 为渐近线.

当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时,$y = 0$.

如 1474 题图所示

【1475*】 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$.

解 当 $x = \pm 1$ 时,$y = 0$,渐近线 $x = 2$,$x = 3$,$y = 1$,

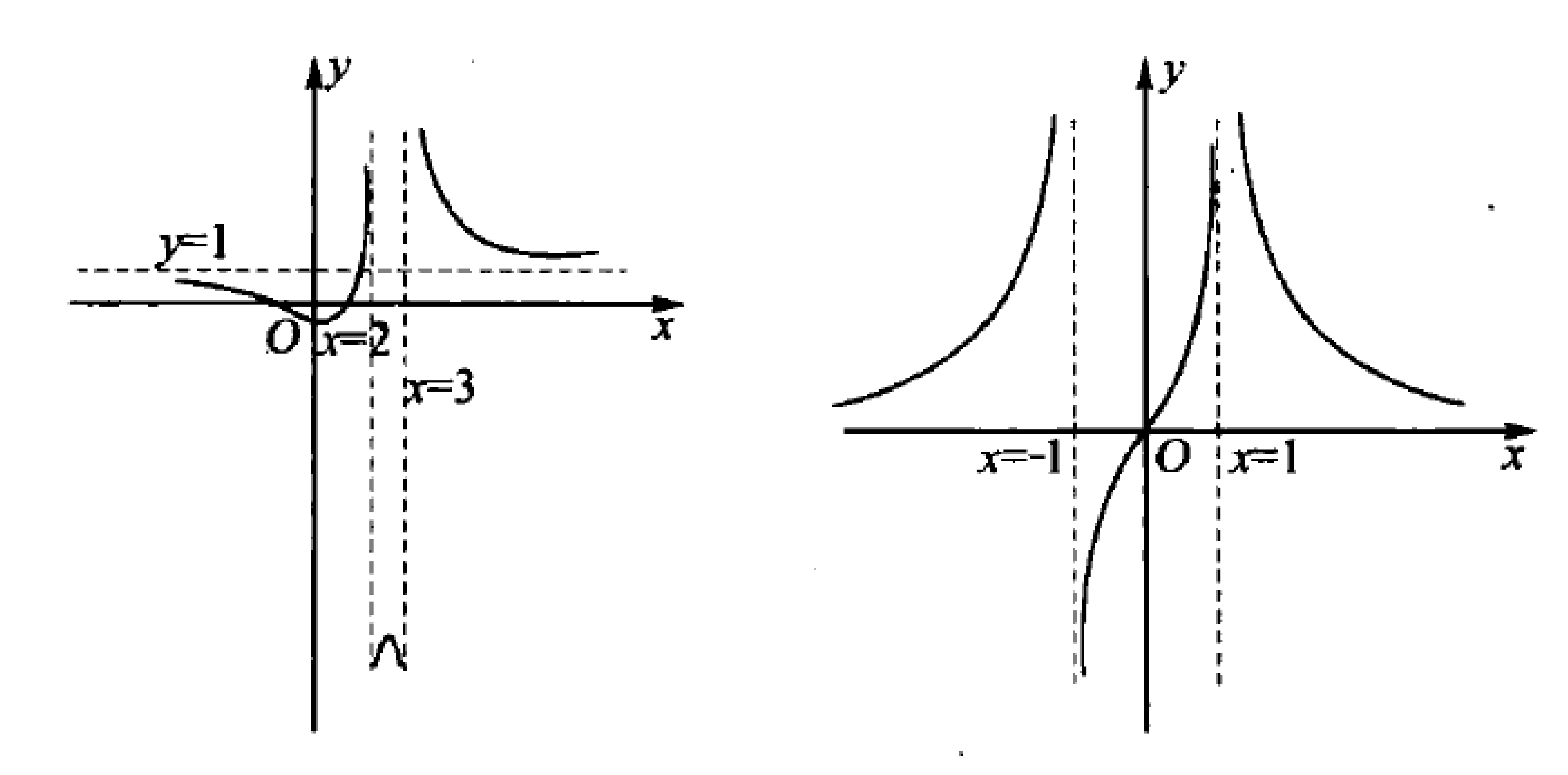
$$y' = \frac{-5x^2 + 14x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2},$$

$$y'' = \frac{2(5x^3 - 21x^2 + 15x + 17)}{(x^2 - 5x + 6)^3},$$

令 $y' = 0$ 得 $x \approx 0.42$,及 $x \approx 2.38$.

令 $y''=0$ 得 $x\approx-0.586$.

经判别知：$y|_{x\approx0.42}\approx-0.20$ 为极小值. $y|_{x\approx2.38}\approx-19.80$ 为极大值 $x\approx-0.586, y\approx-0.07$ 为拐点.



1475 题图　　1476 题图

【1476*】 $y=\dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.

解　当 $x=0$ 时，$y=0$，渐近线 $y=0, x=-1, x=1$，

$$y'=\frac{2x^2+x+1}{(1+x)^2(1-x)^3},$$

$$y''=\frac{2(3x^3+3x^2+5x+1)}{(1+x)^3(1-x)^4},$$

$y'=0$ 无实根. 故无极值点，令 $y''=0$ 得 $x\approx-0.22$，经判别知它为拐点，此时 $y=-0.20$；

当 $x<-1$ 时，$y'>0$，曲线上升；

当 $-1<x<1$ 时，$y'>0$，曲线上升；

当 $x>1$ 时，$y'>0$，曲线下降.

如 1476 题图.

【1477】 $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.

解　当 $x=0$ 时，$y=0$，垂直渐近线 $x=-1$，

又

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x(1+x)^3}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x(1+x)^3}{(1+x)^3}=-3.$$

所以曲线有斜渐近线：$y=x-3$，

$$y'=\frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}.$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$，及 $x=-4$，

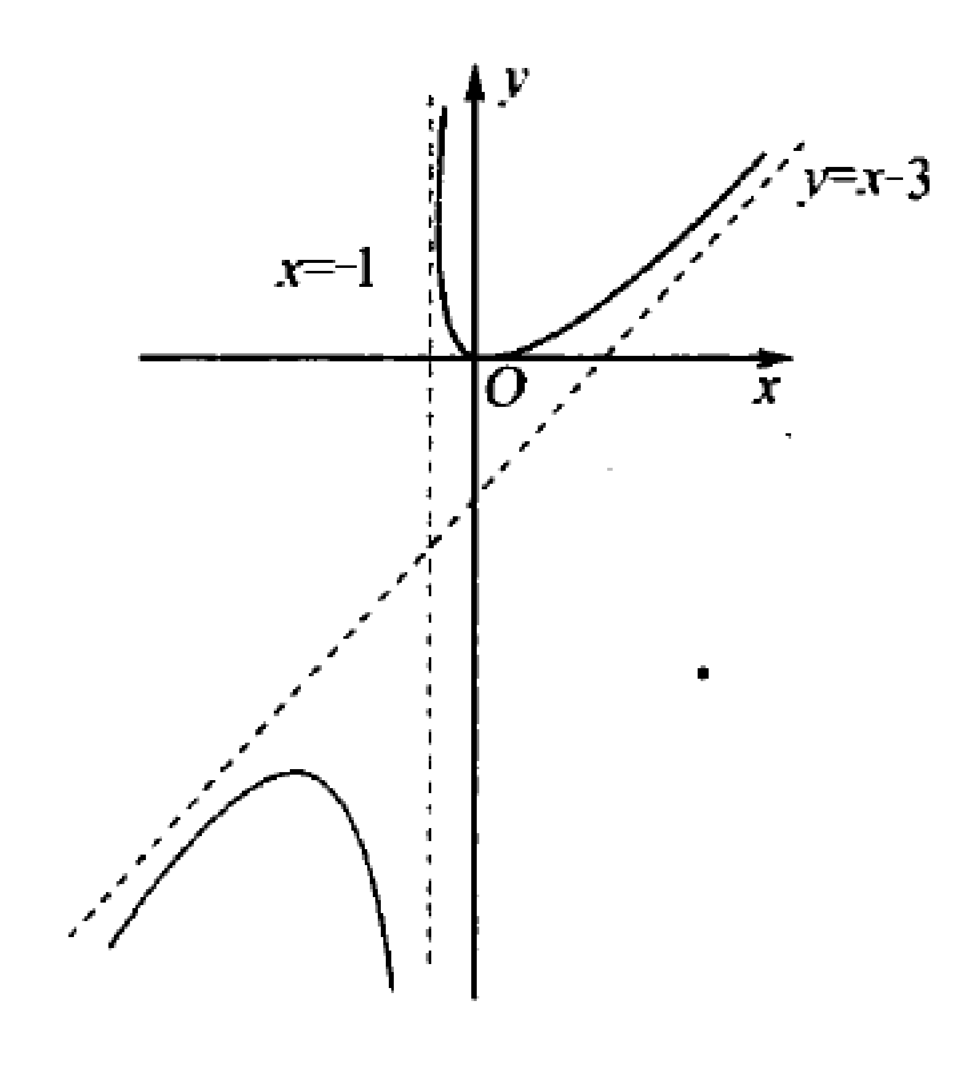
$$y''=\frac{12x^2}{(1+x)^5}.$$

列表

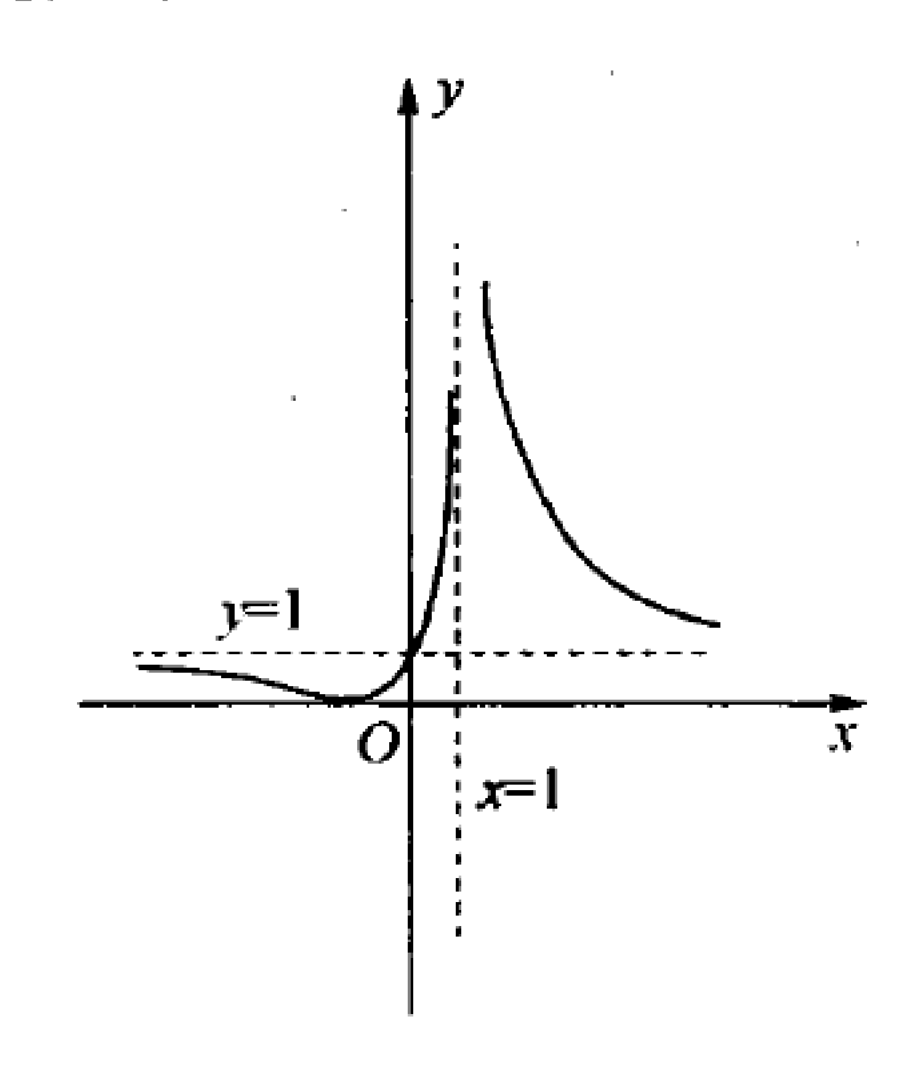
x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
y	↗⌒	极大值	↘⌒	不连续点	↘⌣	极小值	↗⌣

当 $x=-4$ 时，$y=-9\frac{13}{27}$.

当 $x=0$ 时，$y=0$. 如 1477 题图所示.



1477 题图



1478 题图

【1478】 $y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

解 当 $x=-1$ 时，$y=0$，垂直渐近线 $x=1$，又

$$\lim_{x\to\infty}y=1,$$

故 $y=1$ 为曲线的水平渐近线.

$$y'=\frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5},$$

令 $y'=0$ 得 $x=-1$,

$$y''=\frac{16(x+1)^2(x+4)}{(1-x)^6},$$

令 $y''=0$ 得 $x=-1$ 及 $x=-4$.

列表

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	不存在	$-$
y''	$-$	0	$+$	0	$+$	不存在	$+$
y	↘⌒	拐点	↘⌣	极小值	↗⌣	不连续	↘⌣

当 $x=-4$ 时，$y=\frac{81}{625}$，当 $x=-1$ 时，$y=0$.

当 $x=0$ 时，$y=1$.

如 1478 题图所示

【1479】 $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

解 当 $x=0,1$ 时，$y=0$，垂直渐近线为 $x=-1$，

又 $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1, b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=-3,$$

所以 $y=x-3$ 为曲线的斜渐近线

$$y'=\frac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3}.$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$ 及

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}\quad y''=\frac{10x-2}{(x+1)^4}.$$

令 $y''=0$ 得 $x=\frac{1}{5}$.

列表

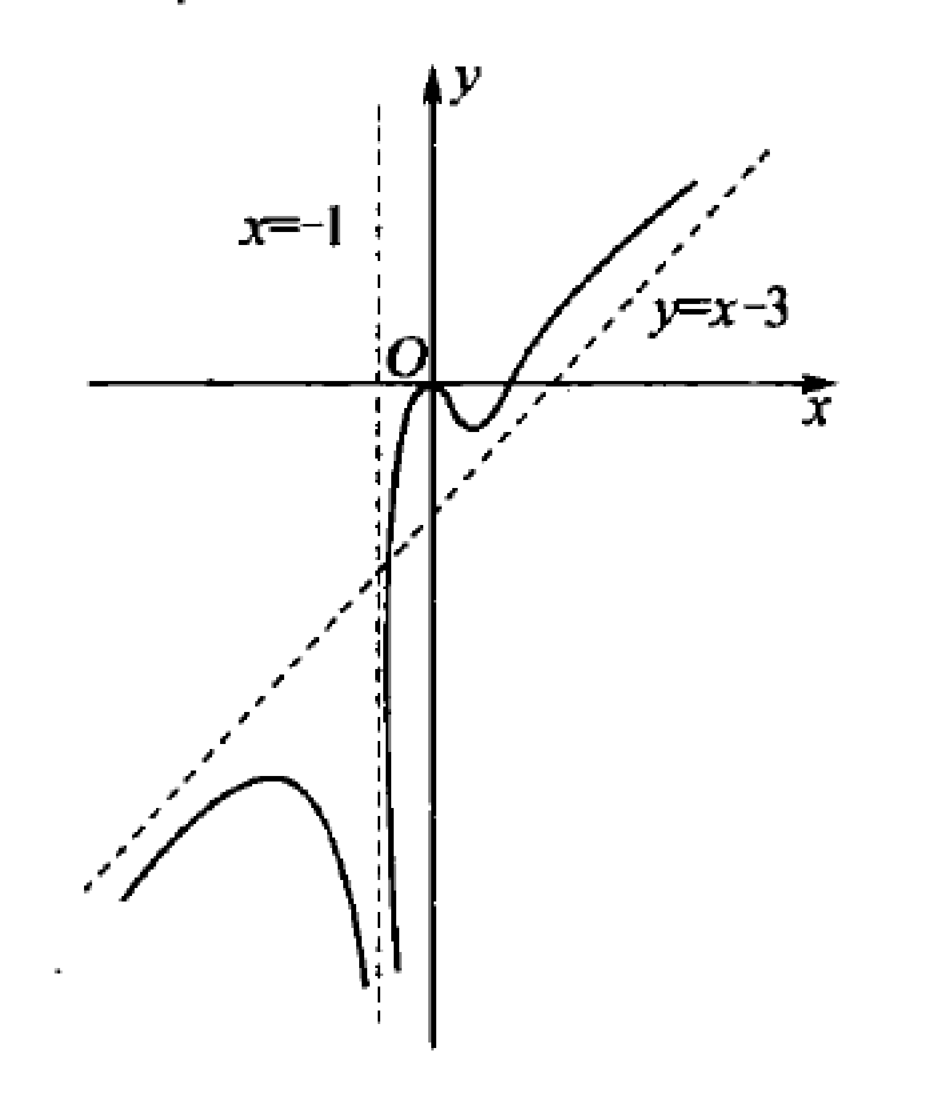
x		$-\frac{3-\sqrt{13}}{2}$		-1		0		$\frac{1}{5}$		$\frac{\sqrt{17}-3}{2}$	
y'	+	0	−	不存在	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	不存在	−	−	−	0	+	+	+
y	↗⌒	极大值	↘⌒	不连续	↗⌒	极大值	↘⌒	拐点	↘⌣	极小值	↗⌣

当 $x=-\frac{\sqrt{17}+3}{2}\approx-3.56$ 时,有极大值 $y\approx-8.82$,

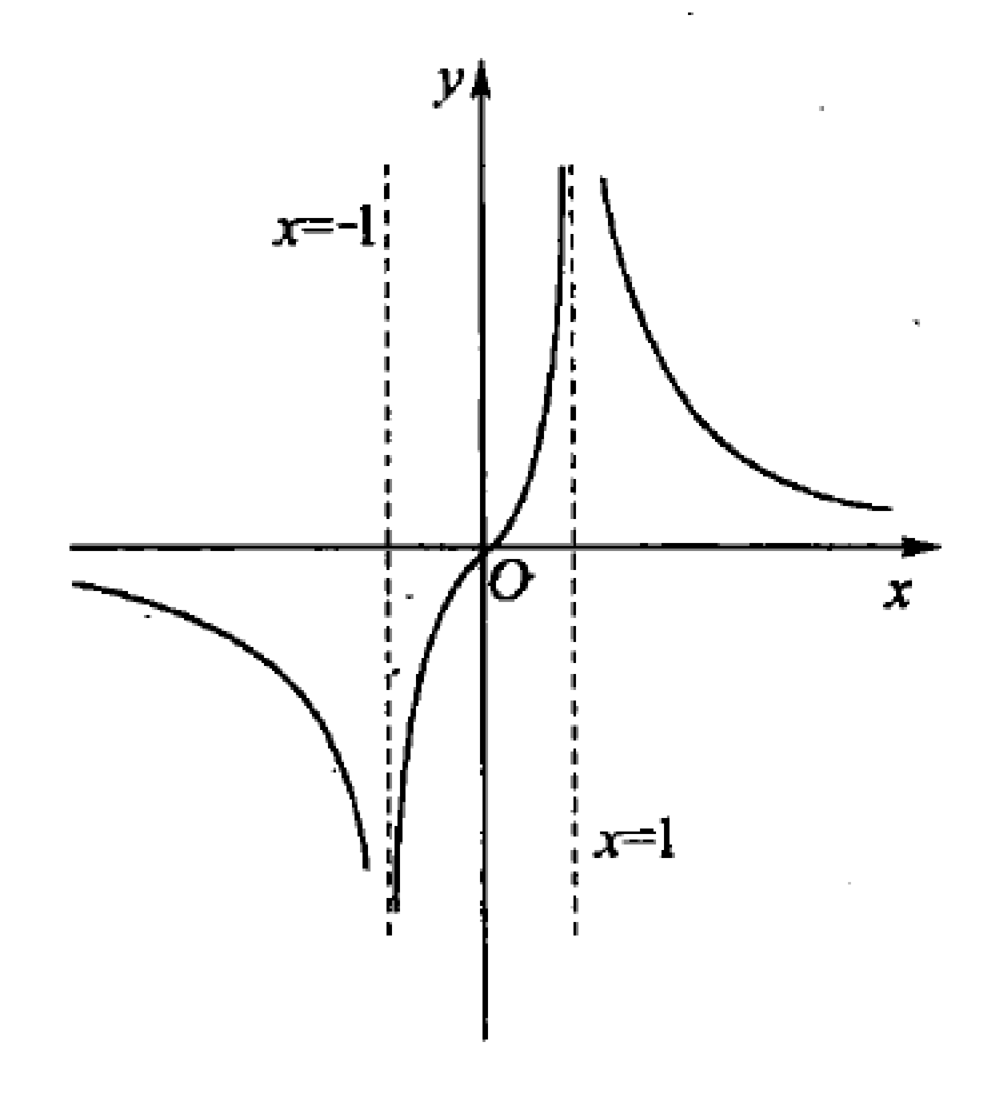
当 $x=0$ 时,有极大值 $y=0$.

当 $x=\frac{\sqrt{17}-3}{2}\approx0.56$ 时,极小值 $y\approx-0.06$.

当 $x=\frac{1}{5}$ 时,$y=-\frac{1}{45}$. 如 1479 题图所示.



1479 题图



1480 题图

【1480】 $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$.

解 当 $x=0$ 时，$y=0$，垂直渐近线 $x=-1$，$x=1$，又

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(1-x^2)^2}=0,$$

所以 $y=0$，为曲线的水平渐近线.

函数为奇函数，图形关于原点对称

$$y'=\frac{3x^2+1}{(1-x^2)^3},$$

$y'=0$ 无实根，无极值点

$$y''=\frac{12x(x^2+1)}{(1-x^2)^4},$$

令 $y''=0$ 得 $x=0$.

列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	不存在	$+$	$+$	$+$	不存在	$-$
y''	$-$	不存在	$-$	0	$+$	不存在	$+$
y	↘⌢	不连续	↗⌢	拐点	↗⌣	不连续	↘⌣

如 1480 题图所示.

【1481】 $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

解 $x=-1$ 时，$y=0$，

垂直渐近线 $x=1$，

又 $$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=5,$$

所以 $y=x+5$ 为曲线的斜渐近线

$$y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}.$$

令 $y'=0$ 得 $x=-1$，及 $x=5$，

$$y''=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4},$$

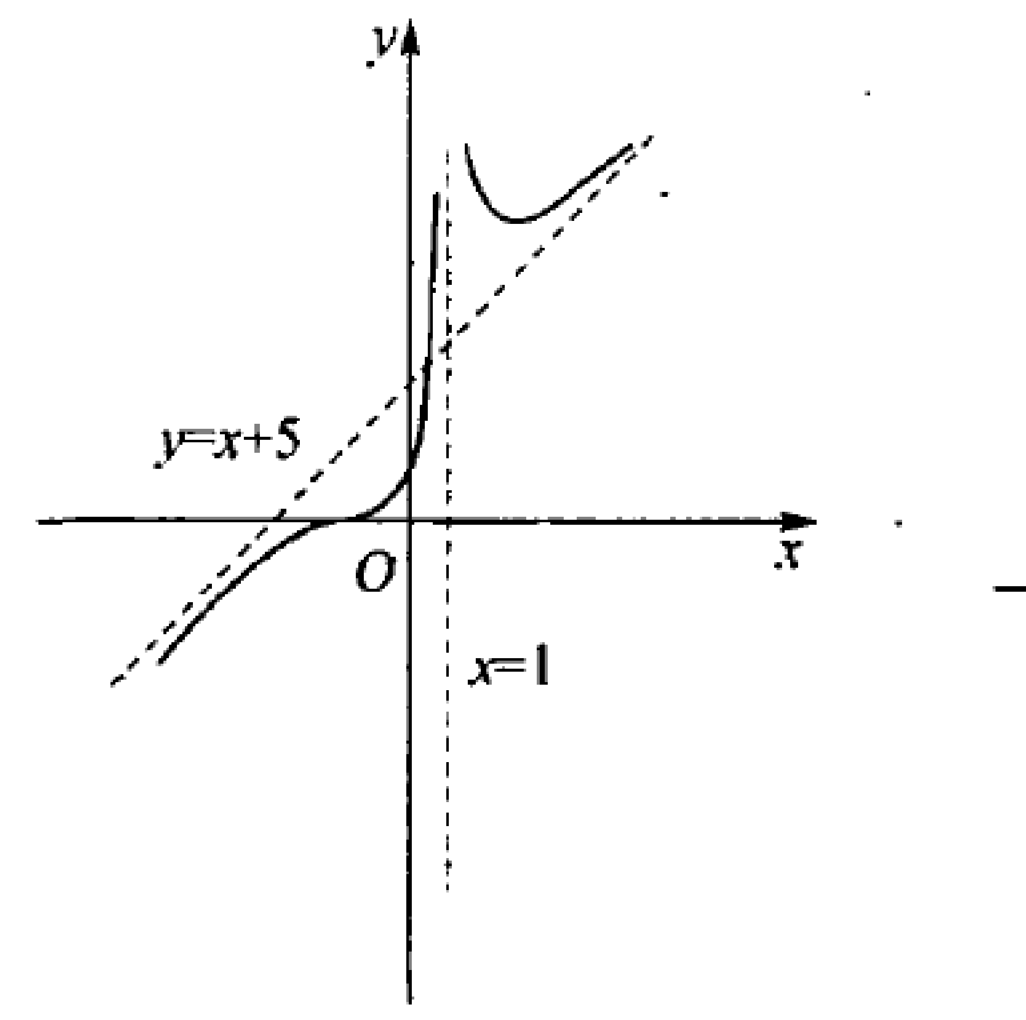
令 $y''=0$ 得 $x=-1$.

列表

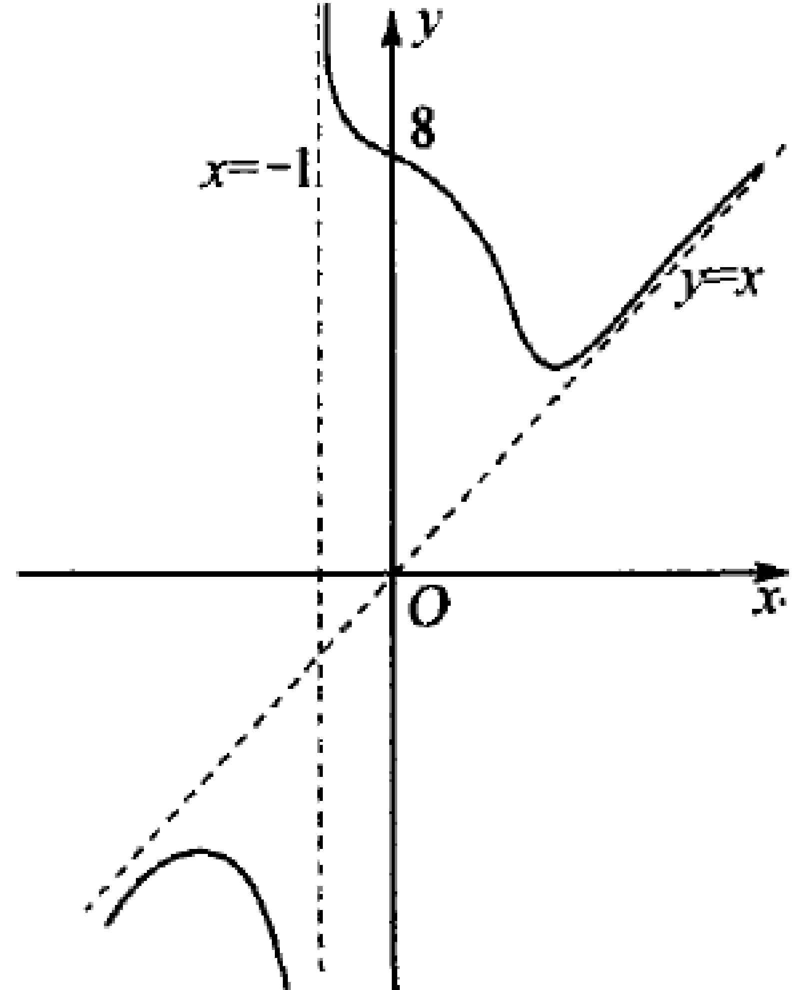
x	$(-\infty,-4)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	$+$	0	$+$	不存在	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	不存在	$+$	$+$	$+$
y	↗⌒	拐点	↗⌣	不连续	↘⌣	极小值	↗⌣

当 $x=5$ 时，$y=13\frac{1}{2}$.

如 1481 题图所示



1481 题图



1482 题图

【1482*】 $y=\frac{x^4+8}{x^3+1}$.

解 垂直渐近线：$x=-1$，

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=0$，

所以 $y=x$ 为曲线的斜渐近线

$$y' = \frac{x^6 + 4x^3 - 24x^2}{(x^3+1)^2},$$

$$y'' = \frac{-6x^5 + 96x^4 + 12x^2 - 48x}{(x^3+1)^3}.$$

令 $y' = 0$，得 $x = 0$，$x = 2$ 及 $x \approx -2.4$.

$y''|_{x=2} > 0$，故当 $x = 2$ 时有极小值 $y = 2\frac{2}{3}$，

$y''|_{x=-2.4} < 0$，故当 $x \approx -2.4$ 时有极大值 $y \approx -3.2$，

$x = 0$ 为拐点.

又 $\quad y''|_{x=\frac{1}{2}} < 0, y''|_{x=1} > 0$，

故在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内还有一拐点 x.

如 1482 题图所示.

【1483】 $y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}$.

解 图形关于 Oy 轴对称且 $x = \pm\frac{\sqrt{10}}{4} \approx \pm 0.79$ 时，$y = 0$

垂直渐近线 $x = -1$，$x = 0$，$x = 1$，又 $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$，所以，$y = 0$ 为曲线的水平渐近线.

$$y' = \frac{4(8x^4 - 10x^2 + 5)}{3x^3(1-x^2)^2},$$

$y' = 0$ 无实根. 所以无极值点

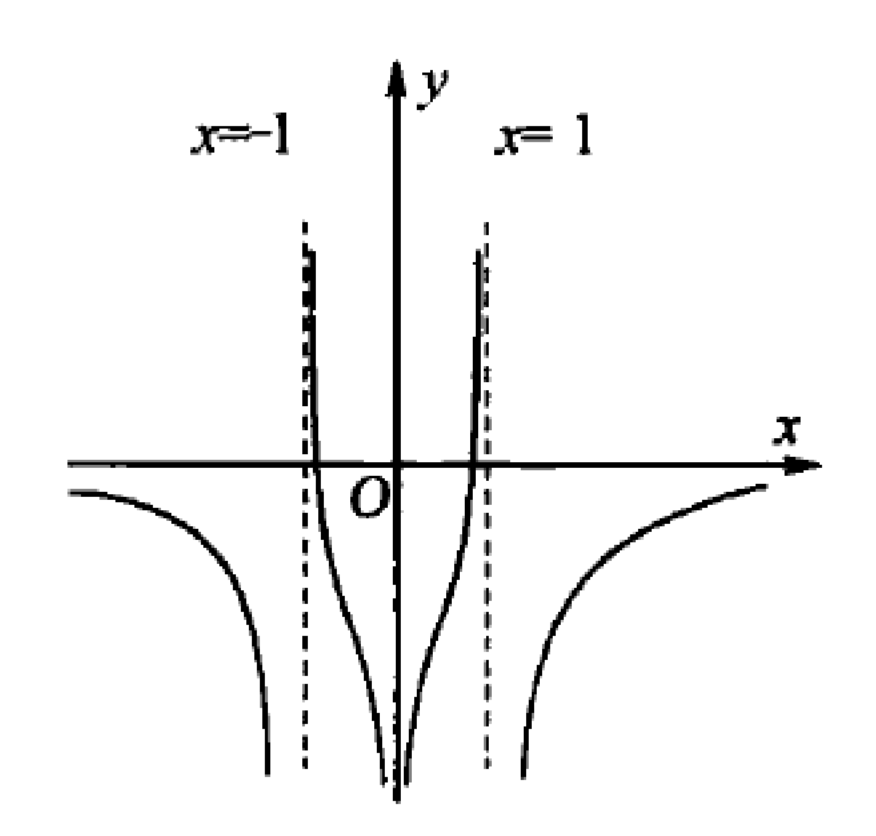
$$y'' = \frac{4(24x^6 - 42x^4 + 45x^2 - 15)}{3x^4(1-x^2)^3},$$

令 $y'' = 0$ 解得 $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0.71$.

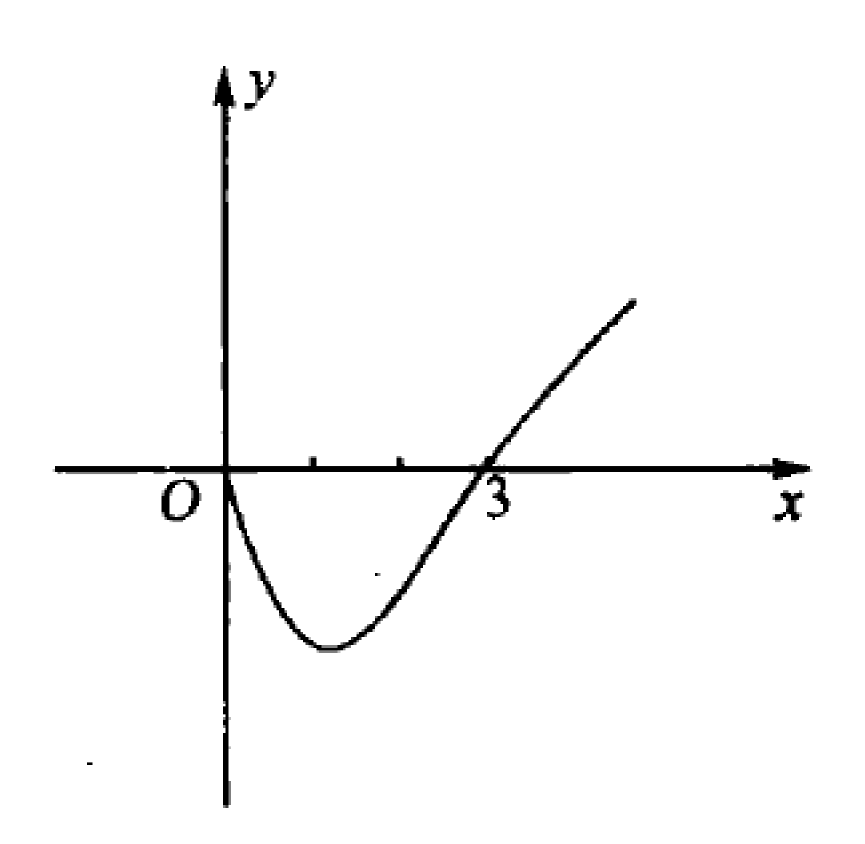
列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	不存在	$-$	$-$	$-$	不存在	$+$	$-$	$+$	不存在	$+$
y''	$-$	不存在	$+$	0	$-$	不存在	$-$	0	$+$	不存在	$-$
y	↘⌢	不连续	↘⌣	拐点	⌢	不连续	⌢	拐点	⌣	不连续	⌢

如 1483 题图所示.



1483 题图



1484 题图

【1484】 $y=(x-3)\sqrt{x}$.

解 定义域:$[0,+\infty)$

当 $x=0,x=3$ 时,$y=0$

$$y'=\frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}.$$

令 $y'=0$ 得 $x=1$. 此时 $y=-2$.

$$y''=\frac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}}>0(x>0).$$

列表

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	+
y''	+	+	+
y	↘⌣	极小值	↗⌣

如 1484 题图所示.

【1485】 $y=\pm\sqrt{8x^2-x^4}$.

解 定义域

$$|x|\leqslant 2\sqrt{2}.$$

当 $x=0,\pm\sqrt{2}$ 时，$y=0$，图形关于坐标轴及坐标原点对称.

下面就第一象限讨论

$$y'=\frac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}.$$

令 $y'=0$ 得 $x=2$，

$$y''=\frac{2x(x^2-12)}{(8-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

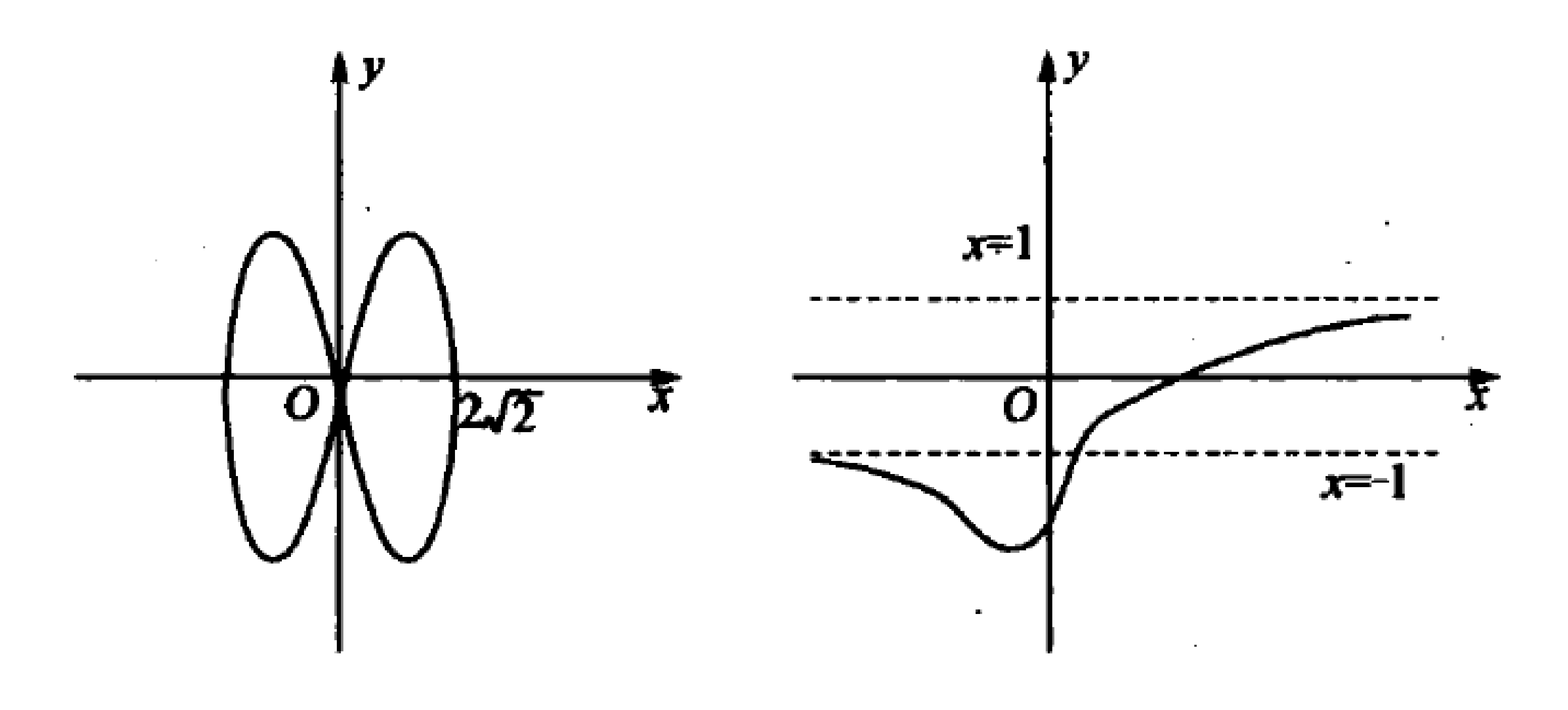
令 $y''=0$ 得 $x=2\sqrt{3}$ 及 $x=0$. $x=2\sqrt{3}$ 不在定义域内.

对于 $x=0$，如果将曲线由第三象限穿向第一象限看成一分支曲线的话，则也可理解为拐点.

当 $0<x<2$ 时，$y'>0$，当 $2<x<2\sqrt{2}$ 时 $y'<0$，故当 $x=2$ 时，有极大值 $y=4$.

利用对称性，可作出位于其它象限的曲线.

如 1485 题图所示.



1485 题图　　　　1485.1 题图

【1485.1】 $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

解　当 $x=2$ 时，$y=0$，

又　$\lim\limits_{x\to+\infty}y=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}y=-1$，

所以 $y=\pm1$ 为曲线的水平渐近线

$$y' = \frac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $y' = 0$,得 $x = -\frac{1}{2}$. 此时 $y = -\sqrt{5} \approx -2.24$,

$$y'' = -\frac{4x^2+3x-2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $y'' = 0$,得 $x = -\frac{3\pm\sqrt{41}}{8}$,

即 $$x_1 = -\frac{3+\sqrt{41}}{8} \approx -1.18,$$

$$x_2 = -\frac{3-\sqrt{41}}{8} \approx 0.42.$$

列表

x	$(-\infty,-x)$	x_1	$\left(x_1,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},x_2\right)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
y'	−	−	−	0	+	+	+
y''	−	0	+	+	+	0	−
y	↘⌒	拐点	↘⌣	极小值	↗⌣	拐点	↘⌒

如 1485.1 题图所示.

【1486】 $y = \pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

解 定义域为$[1,2]\cup[3,+\infty)$.

当 $x = 1,2,3$ 时,$y = 0$.

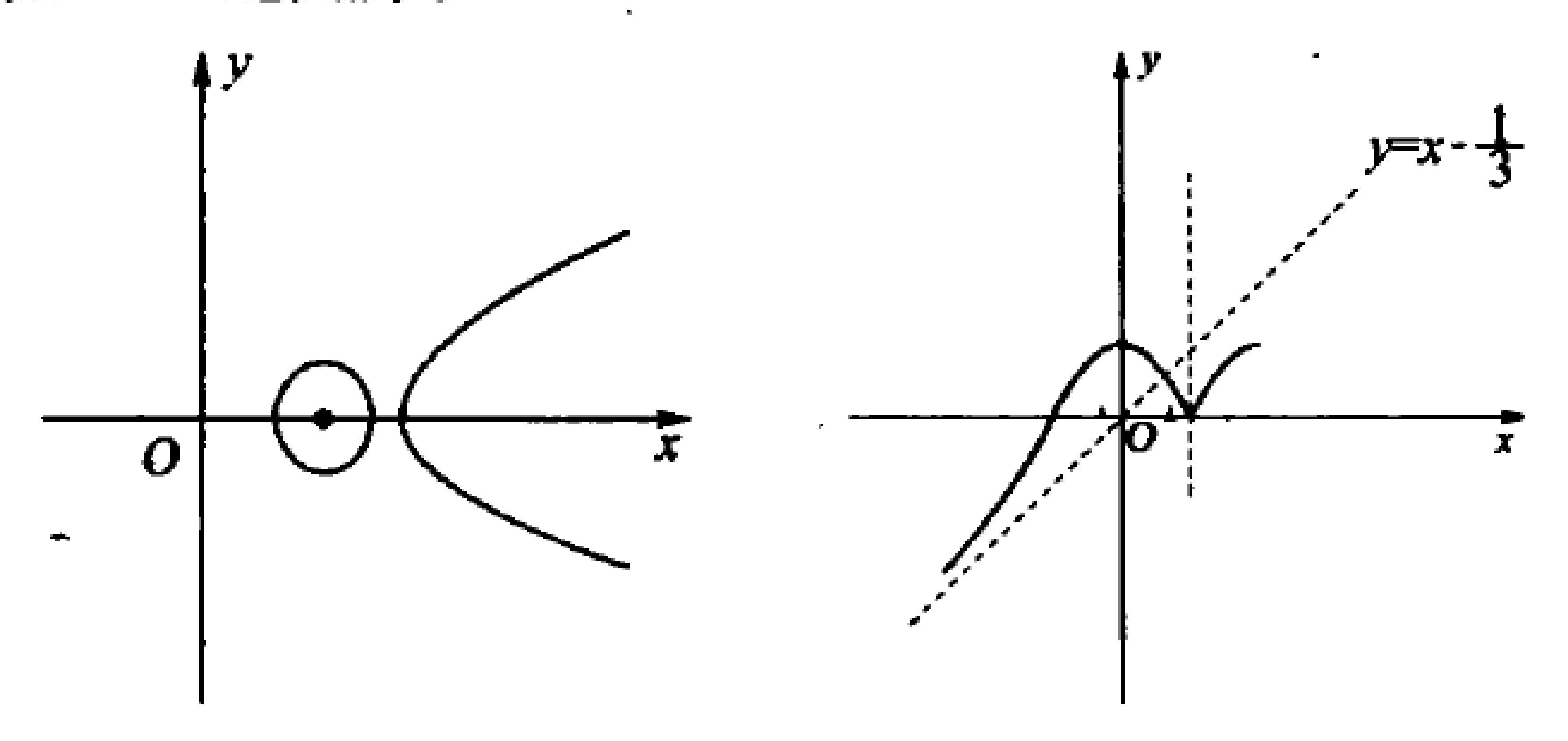
图形关于 Ox 轴对称. 下面就第一象限讨论

$$y' = \frac{3x^2-12x+11}{2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{6-\sqrt{3}}{3} \approx 1.42$,

经判别,此时有极大值 $y = \frac{1}{3}\sqrt[4]{12} \approx 0.62$.

$y''<0$，故无拐点. 曲线呈凸状，当 $x>3$ 时，$y'>0$，曲线上升. 如 1486 题图所示.



1486 题图　　　　1487 题图

【1487*】 $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$.

解　当 $x=\pm 1$ 时，$y=0$，当 $x=0$ 时，$y=1$，又

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-x^2+x+1}-x)$$

$$=-\frac{1}{3},$$

所以 $y=x-\frac{1}{3}$ 为曲线的渐近线

$$y'=\frac{3x^2-2x-1}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}}.$$

令 $y'=0$ 得 $x=-\frac{1}{3}$ 及 $x=1$.

当 $x=\pm 1$ 时，$y'=\infty$，

$$y''=-\frac{8}{9}\frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}}.$$

当 $x=\pm 1$ 时 $y''=\infty$.

列表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$
y''	$+$	∞	$-$	$-$	$-$	∞	$-$
y	↗⌣	拐点	↗⌢	极大值	↘⌢	极小值	↗⌢

当 $x=-\frac{1}{3}$ 时，$y\approx 1.06$. 如 1487 题图.

【1488】 $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$.

解 图形关于 Oy 轴对称

$$y'=\frac{2}{3}\frac{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2+1)^{\frac{2}{3}}},$$

$y'=0$ 无实根.

$$y'\big|_{x=-0}=-\infty,$$

$$y'\big|_{x=+0}=+\infty,$$

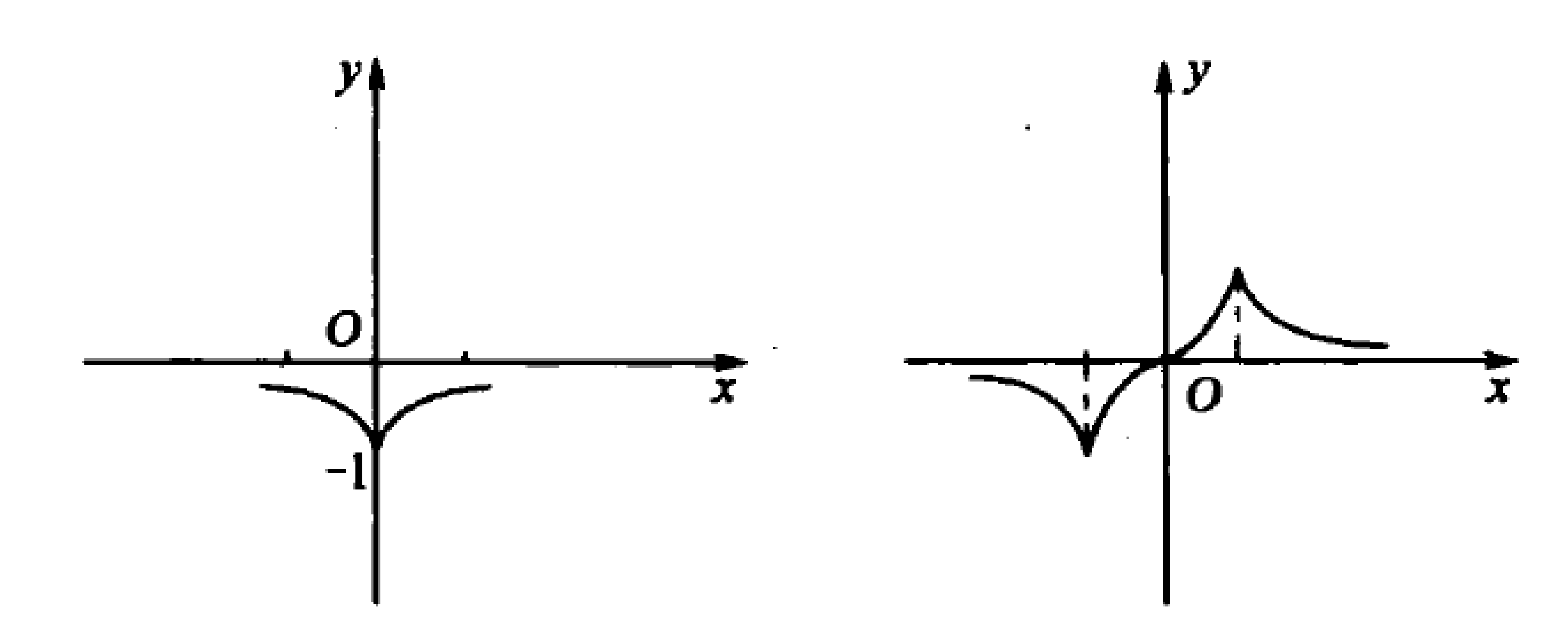
$$y''=-\frac{2}{9}\frac{(x^2+1)^{\frac{5}{3}}+(3-x^2)x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}(x^2+1)^{\frac{5}{3}}}<0,$$

故曲线呈凸状. 又 $\lim\limits_{x\to 0}y=0$，故 $y=0$ 为曲线渐近线.

列表

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$-$	不存在	$+$
y''	$-$	不存在	$-$
y	↘⌢	极小值	↗⌢

当 $x=0$，$y=-1$. 如 1488 题图.



1488 题图　　　　1489 题图

【1489】 $y=(x+2)^{\frac{2}{3}}-(x-2)^{\frac{2}{3}}$.

解　函数为奇函数，图形关于坐标原点对称.

当 $x=0$ 时，$y=0$，又 $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$，所以 $y=0$ 为曲线的渐近线

$$y'=\frac{2}{3}\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}-(x+2)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}},$$

$y'=0$ 无实根.

当 $x=\pm2$ 时，$y'=\infty$

$$y''=\frac{2}{9}\frac{(x+2)^{\frac{4}{3}}-(x-2)^{\frac{4}{3}}}{(x+2)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{4}{3}}},$$

令 $y''=0$，得 $x=0$.

列表

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	∞	$-$
y''	$-$	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$
y	↘⌒	最小值	↗⌒	拐点	↗⌣	最大值	↘⌣

当 $x=-2$ 时，$y=-\sqrt[3]{16}$，

当 $x=2$ 时，$y=\sqrt[3]{16}$. 如 1489 题所示.

【1490】 $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$.

解　函数为偶函数，图形关于 Oy 轴对称

$$y' = \frac{2}{3}\left[\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}\right],$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$.

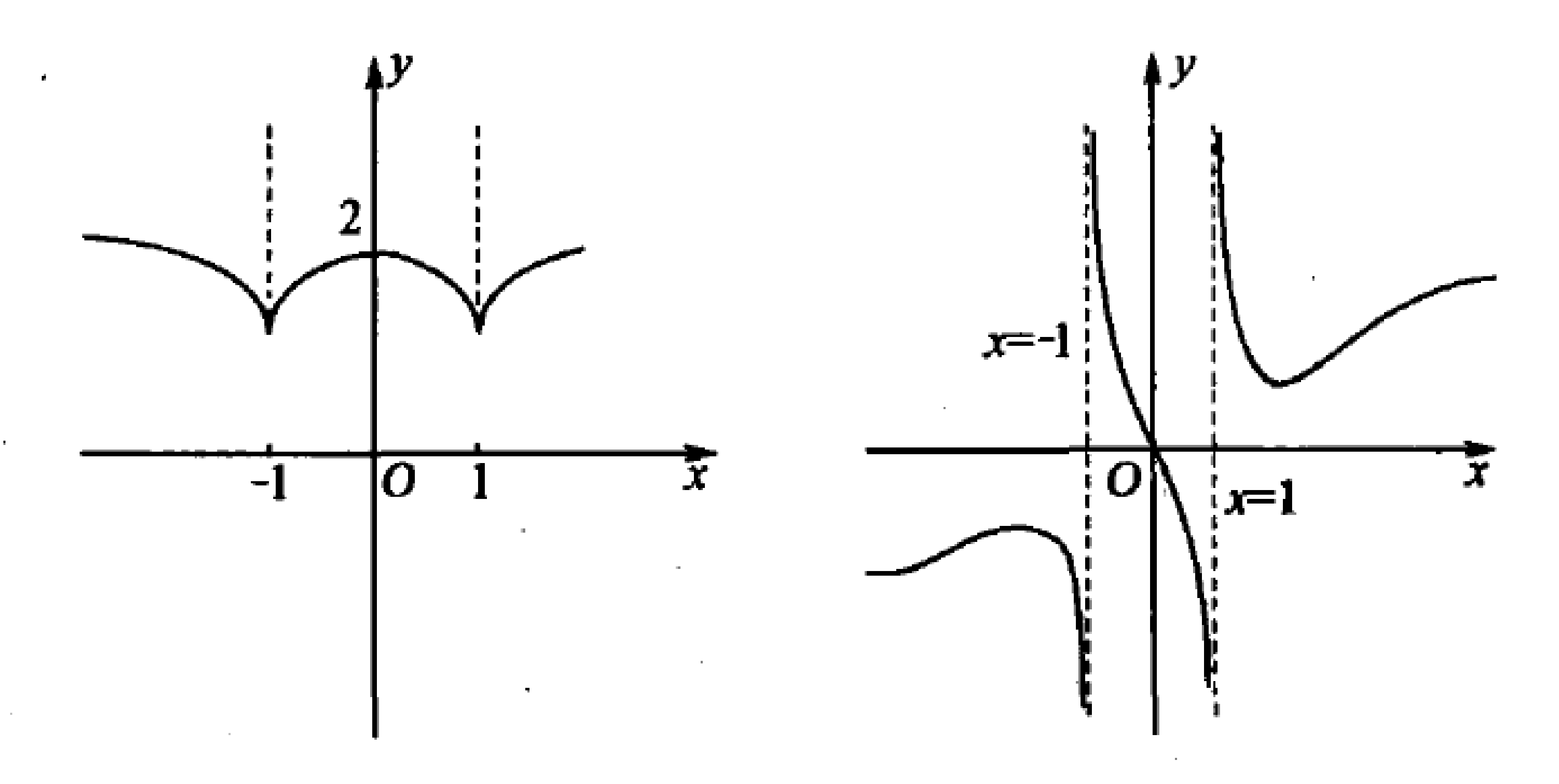
当 $x=\pm 1$ 时，$y'=\infty$，

$$y'' = -\frac{2}{9}\left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{4}{3}}}+\frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}}\right]<0,$$

曲线始终呈凸状. 当 $x=\pm 1$ 时，y 取最小值$\sqrt[3]{4}$.

当 $x=0$，有极大值 $y=2$.

如 1490 题图所示.



1490 题图　　　　1491 题图

【1491】 $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

解　函数为奇函数，图形关于坐标原点对称.

当 $x=0$ 时，$y=0$，垂直渐近线 $x=\pm 1$，

$$y' = \frac{x^2-3}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}},$$

令 $y'=0$ 得 $x=\pm\sqrt{3}$，

$$y'' = -\frac{2x(x^2-9)}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}},$$

令 $y''=0$ 得 $x=0$，及 $x=\pm 3$.

列表

x	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	−	−	−	∞	−	0	+	+	+
y''	+	0	−	∞	+	+	+	0	−
y	↘⌣	拐点	↘⌢	间断性	↘⌣	极大值	↗⌣	拐点	↗⌢

当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\approx 1.38$.

当 $x=\pm 3$ 时，$y=\pm 1\dfrac{1}{2}$.

如 1491 题图所示.

【1492】 $y=\dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

解 存在域：$|x|\geqslant 1$ 图形关于 Oy 轴对称，且 $y\geqslant 0$ 即图形在 Ox 轴的上方，又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to+\infty}\left(y-\frac{1}{2}x\right)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=-\frac{1}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\left(y+\frac{1}{2}x\right)=0,$$

所以 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$ 为曲线的渐近线

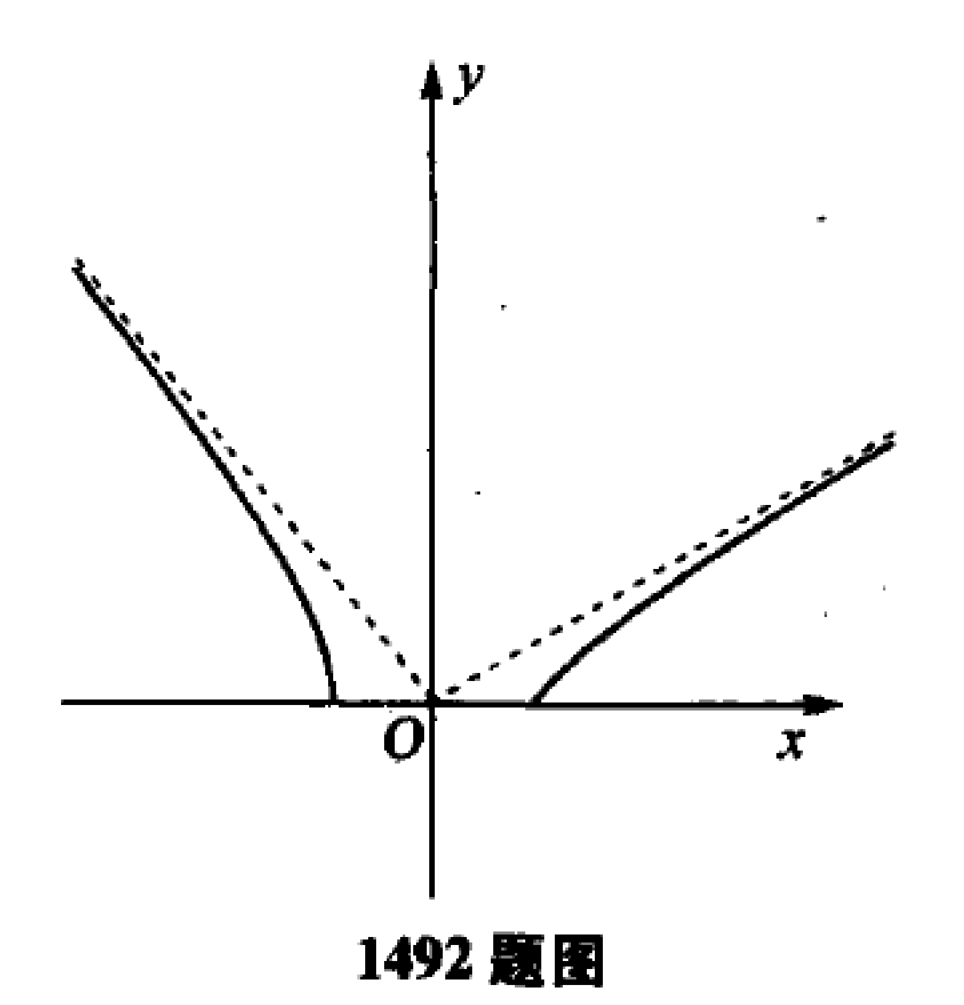
$$y'=\frac{2x^5-3x^2+2x}{(2x^2-1)^2\sqrt{x^2-1}},$$

$$y''=\frac{-12x^6+18x^5-6x^4-9x^3+12x^2-6x+2}{(2x^2-1)^3(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

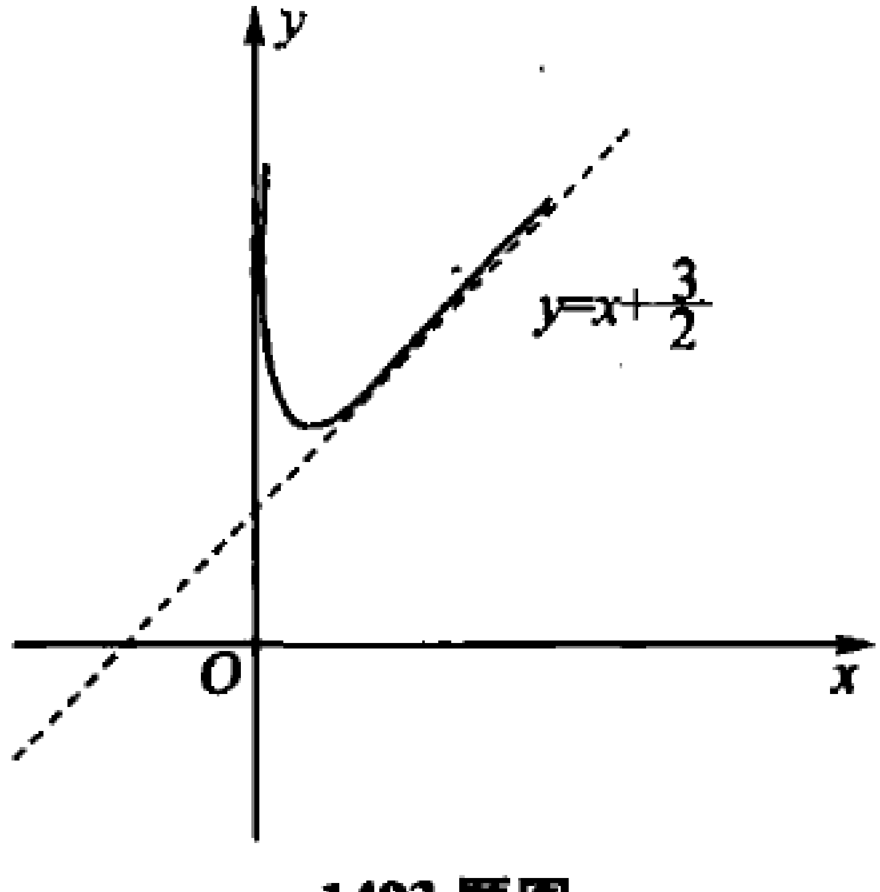
当 $x>1$ 时，$y'>0$，$y''<0$. 故当 $x>1$ 时，曲线上升呈凸状

当 $x=\pm 1$ 时，有边界极小值 $y=0$.

如 1492 题图所示.



1492 题图



1493 题图

【1493】 $y=\dfrac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

解 存在域:$x>0$,垂直渐近线 $x=0$,又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=1,\ \lim_{x\to+\infty}(y-x)=\frac{3}{2},$$

故 $y=x+\dfrac{3}{2}$ 为曲线渐近线

$$y'=\frac{(2x-1)\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}}.$$

令 $y'=0$ 得 $x=\dfrac{1}{2}$,

$$y''=\frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}}>0,$$

故曲线是凹的. 当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,有极小值 $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\approx 2.60$.

如 1493 题图所示.

【1494】 $y=1-x+\sqrt{\dfrac{x^3}{3+x}}$.

解 定义域为$(-\infty,-3)\cup[0,+\infty)$.

当 $x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\approx 4.30$ 时,$y=0$,垂直渐近线为 $x=-3$. 又

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\left(1-x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x-1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + (x-1)} = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = -2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} (y+2x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+x+\sqrt{\frac{x_3}{x+3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x+1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x - 1} = \frac{5}{2},$$

故 $y=-\frac{1}{2}$ 及 $y=-2x+\frac{5}{2}$ 为曲线的渐近线

$$y' = -1 + \frac{\sqrt{x}(2x+9)}{2(x+3)^{\frac{3}{2}}}.$$

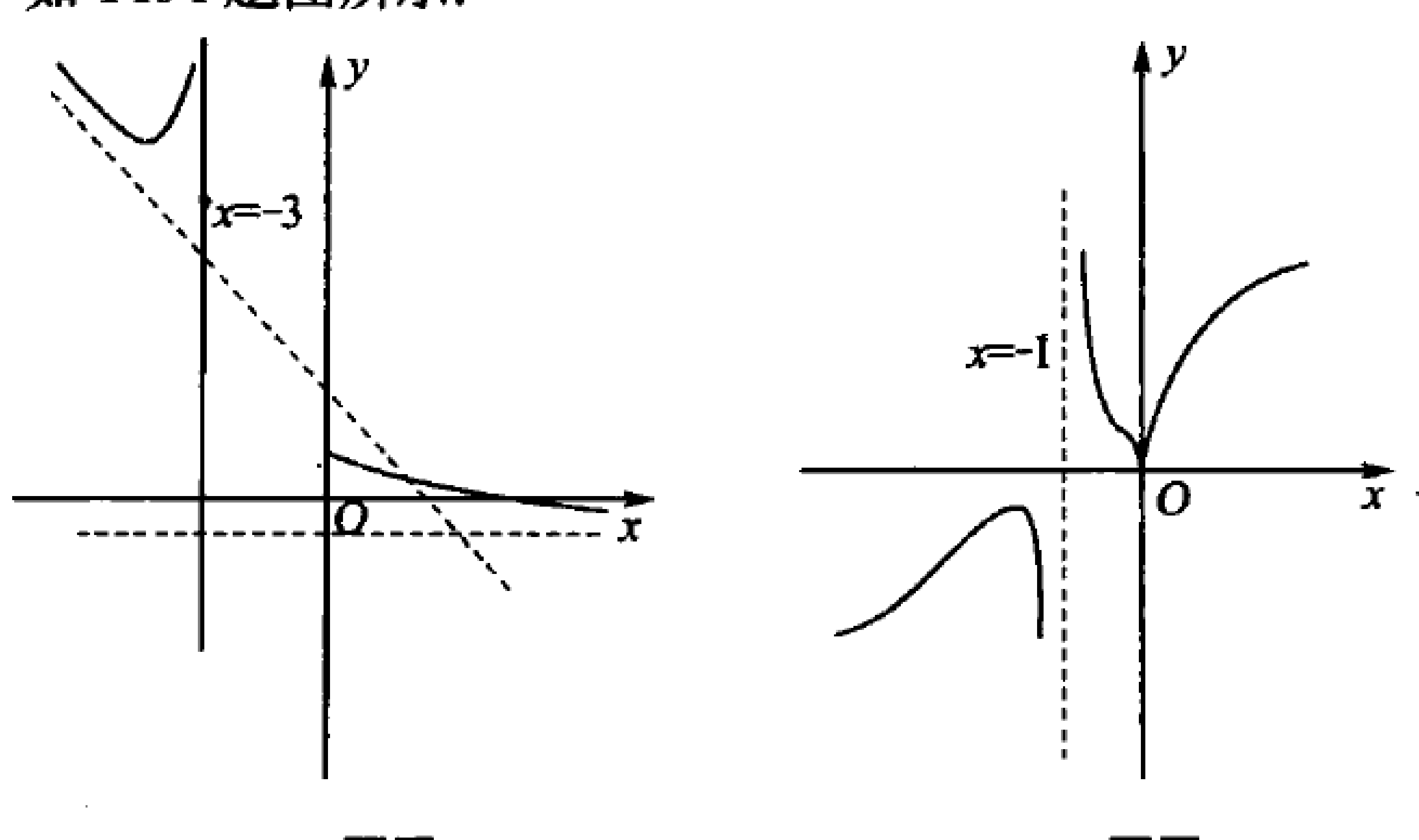
令 $y'=0$ 得 $x=-4$.

$$y'' = \frac{27}{4(x+3)^2\sqrt{x(x+3)}} > 0,$$

故曲线呈凹状，当 $x=-4$ 时，有极小值 $y=13$.

当 $x=0$ 时，有边界极大值 $y=1$.

如 1494 题图所示.



1494 题图 **1495 题图**

【1495】 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$.

解 当 $x=0$ 时, $y=0$.

垂直渐近线: $x=-1$,

$$y'=\frac{x+2}{3(x+1)\sqrt[3]{x(x+1)}}.$$

令 $y'=0$ 得 $x=-2$.

当 $x=0$ 时, $y'=\infty$,

$$y''=-\frac{2(x^2+4x+1)}{9x(x+1)^2\sqrt[3]{x(x+1)}}.$$

令 $y''=0$ 得 $x=-2\pm\sqrt{3}$,

经判别当 $x=0$ 时,有极小值 $y=0$,

当 $x=-2$ 时,有极大值 $y=-\sqrt[3]{4}\approx-1.59$,

拐点 $x=-2+\sqrt{3}\approx-0.27$. 此时 $y\approx0.46$,

$x=-2-\sqrt{3}\approx-3.73$. 此时 $y\approx-1.72$.

如 1495 题图所示.

【1496*】 $y=\sqrt{\dfrac{x^4+3}{x^2+1}}$.

解 函数为偶函数,图形关于 Oy 轴对称,又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=1,\ \lim_{x\to+\infty}(y-x)=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-1,\ \lim_{x\to-\infty}(y+x)=0,$$

所以 $y=x$ 及 $y=-x$ 为曲线的渐近线

$$y'=\frac{x(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x^4+3)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

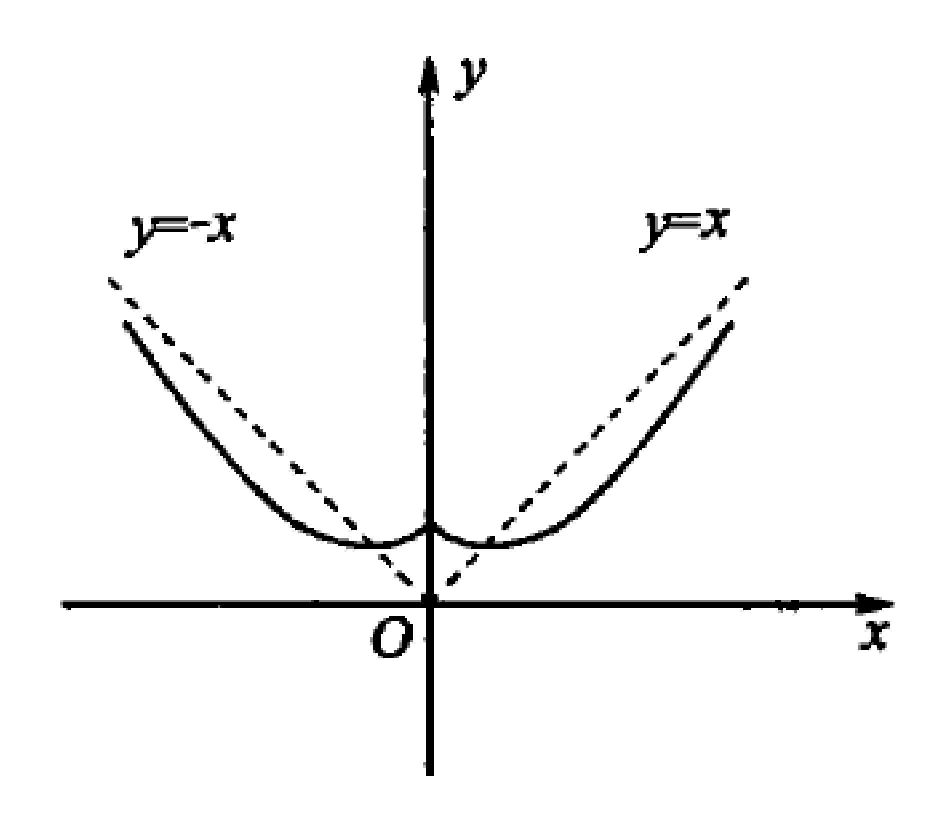
令 $y'=0$,得 $x=0$ 及 $x=\pm1$.

经判别,当 $x=0$ 时,有极大值 $y=\sqrt{3}$.

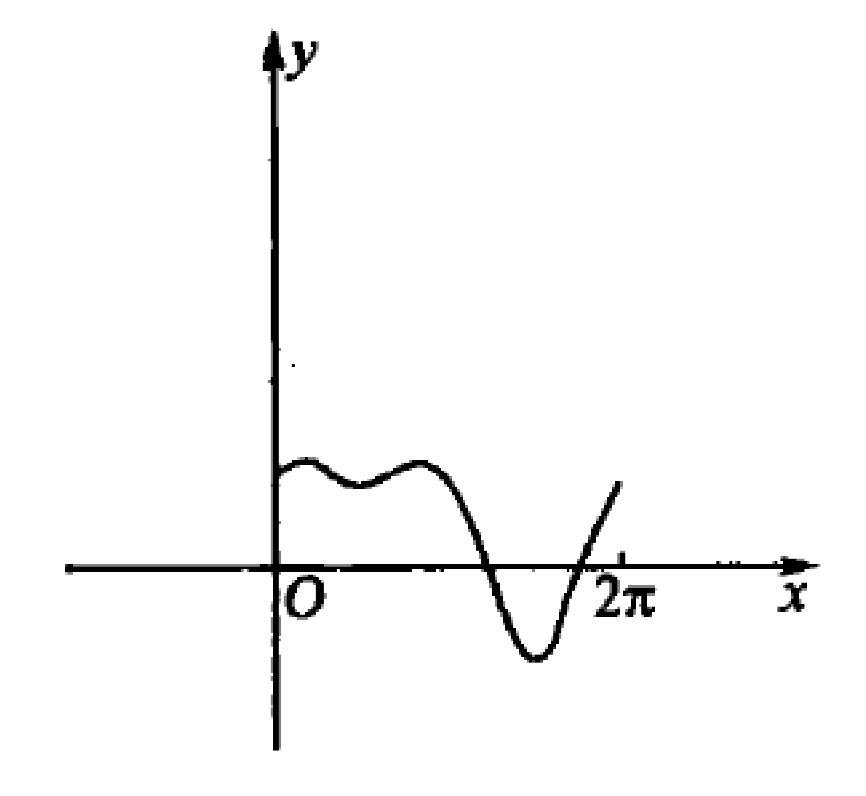
当 $x=\pm1$ 时有极小值 $y=\sqrt{2}$,

$$y''=\frac{-x^8+20x^6+18x^4+36x^2-9}{(x^4+3)^{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $y''=0$ 得 $x\approx\pm 0.47$ 及 $x\approx\pm 4.58$，经判别均为拐点.
当 $x\approx\pm 0.47$ 时，$y\approx 1.14$.
当 $x\approx\pm 4.58$ 时，$y\approx 4.45$.
如 1496 题图所示.



1496 题图



1497 题图

【1497】 $y=\sin x+\cos^2 x$.

解 函数是以 2π 为周期的函数

零点： $x=\pi+\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 1.21\pi$，

$$x=2\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 1.79\pi,$$

$$y'=\cos x(1-2\sin x).$$

令 $y'=0$ 得 $x=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}$ 及 $\dfrac{3\pi}{2}$，

$$y''=-\sin x-2\cos 2x=4\sin^2 x-\sin x-2.$$

令 $y''=0$ 得

$$x_1=\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx 0.32\pi,$$

此时 $y_1\approx 1.13$，

$$x_2=\pi-\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx 0.68\pi,$$

此时 $y_2\approx 1.13$，

$$x_3=\pi+\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}\approx 1.20\pi,$$

此时 $y_3 \approx 0.055$,

$$x_4 = 2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8} \approx 1.80\pi,$$

此时 $y_4 \approx 0.055$,

经判别,x_1,x_2,x_3,x_4 均为拐点.

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时,有极小值 $y = 1$.

当 $x = \frac{3\pi}{2}$ 时,有极小值 $y = -1$.

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{5\pi}{6}$ 时,有极大值 $y = 1\frac{1}{4}$.

如 1497 题图所示.

【1498】 $y = (7 + 2\cos x)\sin x$.

解 图形关于原点对称,函数的周期 $T = 2\pi$

讨论一个周期 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 内的图形

零点: $x = 0, \pm\pi, y' = 7\cos x + 2\cos 2x$.

令 $y' = 0$,解之得

$$x_1 = \arccos\frac{1}{4} \approx 0.42\pi,$$

$$x_2 = -\arccos\frac{1}{4} \approx -0.42\pi,$$

$$y'' = -7\sin x - 4\sin 2x.$$

令 $y'' = 0$,解之得

$x_3 = 0$,

此时 $y_3 = 0$,

$$x_{4,5} = \pm\arccos\left(-\frac{7}{8}\right) \approx \pm 0.84\pi,$$

此时 $y_{4,5} \approx \pm 2.54, x_{6,7} = \pm\pi$,

此时 $y_{6,7} = 0$.

经判别,x_3,x_4,x_5,x_6 和 x_7 均为拐点.

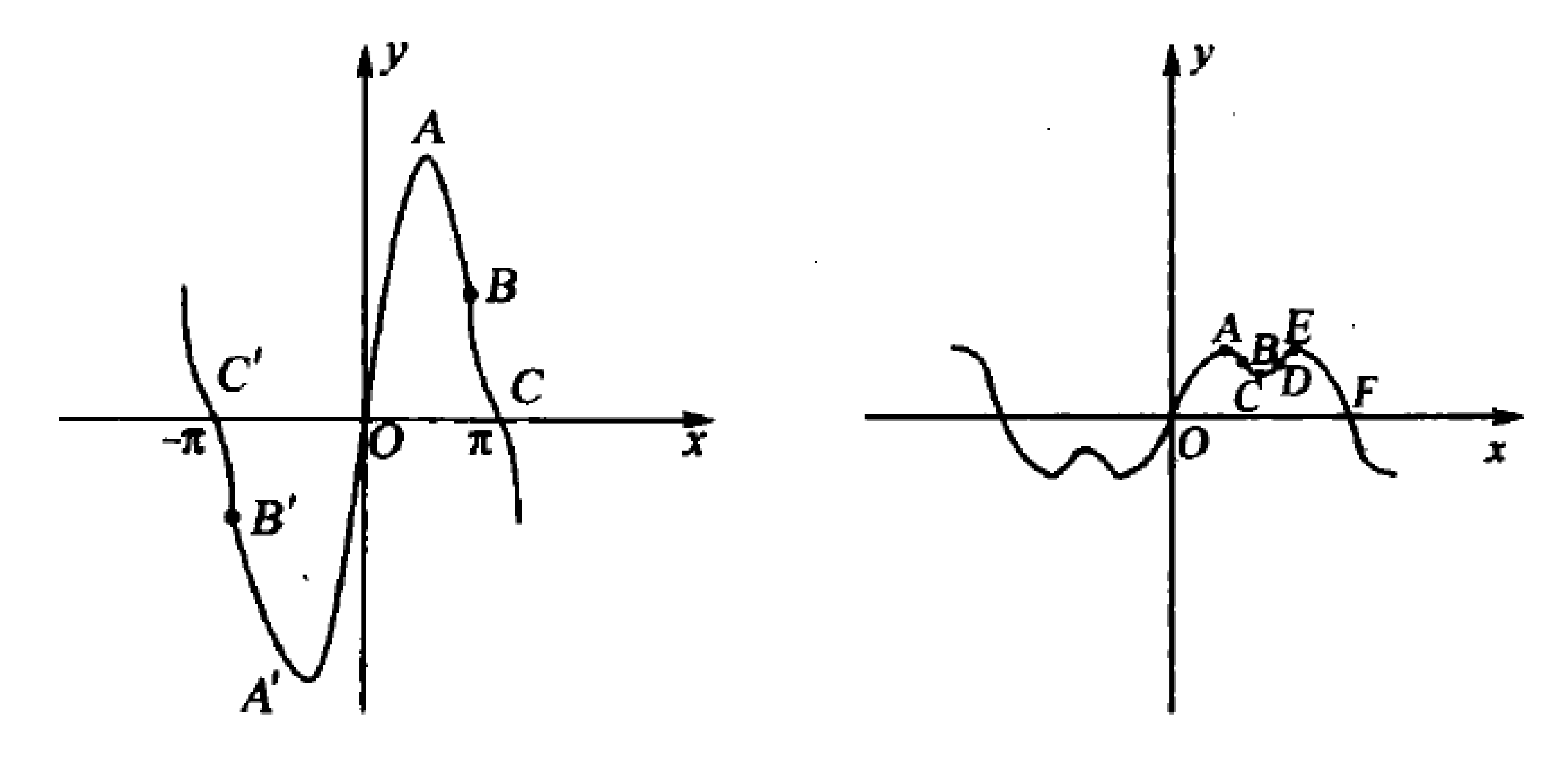
当 $x = -\arccos\frac{1}{4}$ 时,有极小值 $y = -\frac{15}{8}\sqrt{15} \approx -7.26$.

当 $x=-\arccos\frac{1}{4}$ 时，有极大值 $y=\frac{15}{8}\sqrt{15}\approx 7.26$.

如 1498 题图所示. 图中主要点的坐标

$A(0.42\pi, 7.26)$， $B(0.84\pi, 2.54)$， $C(\pi, 0)$，

$A'(-0.42\pi, 7.26)$， $B'(-0.84\pi, 2.54)$， $C'(-\pi, 0)$.



1498 题图　　　　1499 题图

【1499】 $y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$.

解 图形关于原点对称，函数的周期 $T=2\pi$. 讨论函数在一个周期 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内的图形.

零点： $x=0, x=\pm\pi, y'=\cos x+\cos 3x$.

令 $y'=0$. 解得

$$x=-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},$$

$$y''=-\sin x-3\sin x.$$

令 $y''=0$ 解得

$$x_1=0,$$

$$x_{2,3}=\pm\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\approx\pm 0.37\pi,$$

$$x_{4,5}=\pm\left(\pi-\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\approx\pm 0.63\pi,$$

$$x_{6,7}=\pm\pi.$$

经判别：$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ 均为拐点.

当 $x=-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4}$ 时，有极小值

$$y=-\frac{2}{3}\sqrt{2}\approx-0.94.$$

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，有极小值 $y=\frac{2}{3}$.

当 $x=-\frac{\pi}{2}$ 时，有极大值 $y=-\frac{2}{3}$.

当 $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$ 时，有极大值

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{2}\approx 0.94.$$

如 1499 题图所示. 图中主要点的坐标：

$A(\frac{\pi}{4},0.94)$，　$B(0.37\pi,0.81)$，　$C(\frac{\pi}{2},\frac{2}{3})$，

$D(0.63\pi,0.84)$，$E(\frac{3\pi}{4},0.94)$，　$F(\pi,0)$.

【1500】 $y=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x$.

解　图形关于 Oy 轴对称，函数的周期 $T=2\pi$. 讨论函数在一个周期 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内的图形.

零点：　$x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}\approx\pm 0.62\pi$,

$$y'=-\sin x+\sin 2x.$$

令 $y'=0$. 解得

$$x=0,\pm\frac{\pi}{3},\pm\pi, y''=-\cos x+2\cos 2x.$$

令 $y''=0$，解得

$$x_{1,2}=\pm\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx 0.18\pi,$$

$$y_{1,2}\approx 0.63,$$

$$x_{3,4}=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}\approx 0.70\pi,$$

$y_{3,4} \approx -0.44$.

经判别 x_1, x_2, x_3, x_4 均为拐点.

当 $x=0$ 时,有极小值 $y=\frac{1}{2}$.

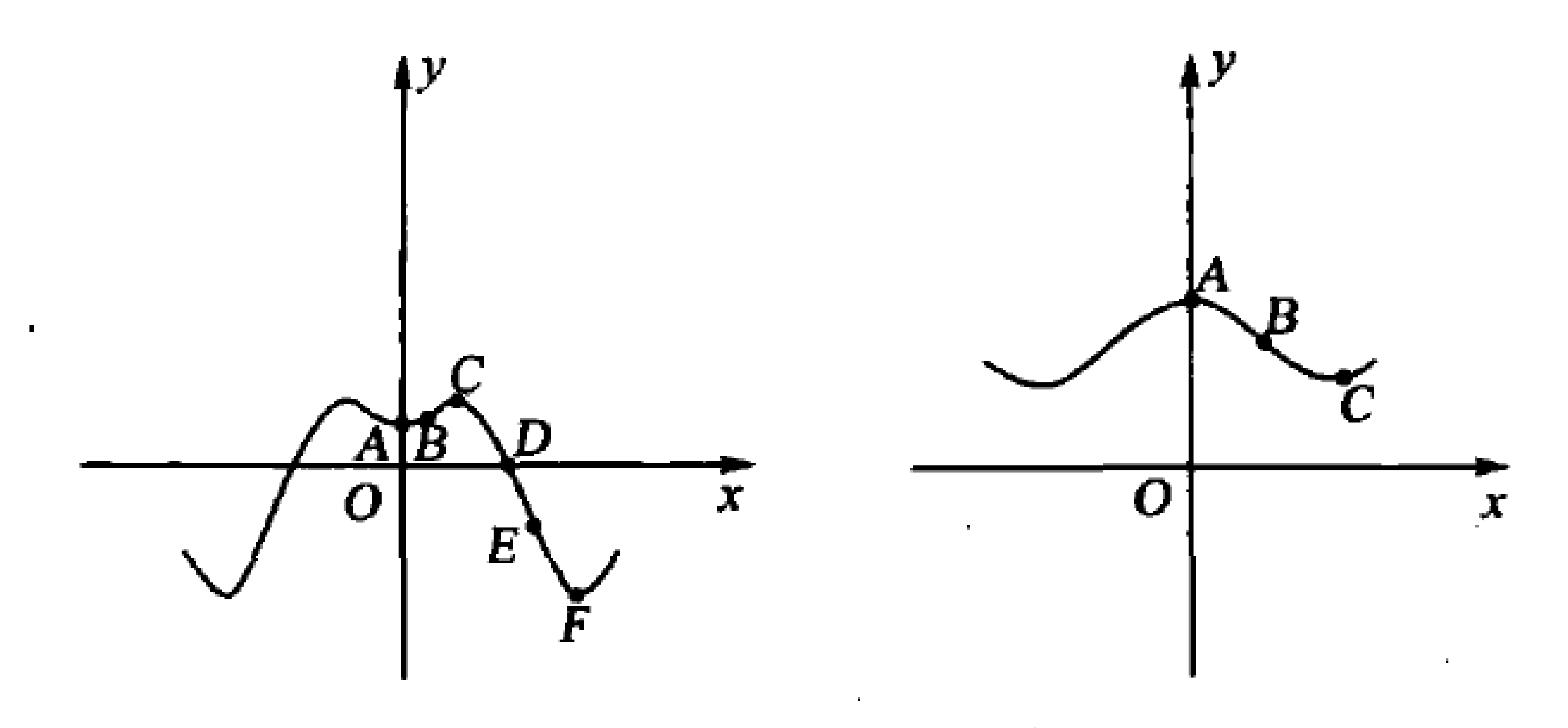
当 $x=\pm\pi$ 时,有极小值 $y=-\frac{3}{2}$.

当 $x=\pm\frac{\pi}{3}$ 时有极大值 $y=\frac{3}{4}$.

如 1500 题图所示,图中主要点的坐标:

$A\left(0,\frac{1}{2}\right)$,　$B(0.18\pi, 0.63)$,　$C\left(\frac{\pi}{3},\frac{3}{4}\right)$,

$D(0.6\pi, 0)$,　$E(-0.70\pi, -0.44)$,　$F\left(\pi, -\frac{3}{2}\right)$.



1500 题图　　1501 题图

【1501】 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

解　图形关于 Oy 轴对称

由于

$$y=\sin^4 x+\cos^4 x$$
$$=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}(3+\cos 4x),$$

故函数的周期 $T=\frac{\pi}{2}$. 讨论函数在一个周期 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$ 内的图形.

由 $y' = -\sin 4x$,

令 $y' = 0$ 得 $x = 0, \pm\frac{\pi}{4}$,

$y'' = -4\cos 4x$,令 $y'' = 0$ 得 $x_{(1)} = \pm\frac{\pi}{8}$.

显然,点 $x_1 = \frac{\pi}{8}$,$x_{1,2} = -\frac{\pi}{8}$ 为拐点

当 $x = \pm\frac{\pi}{8}$ 时,$y = \frac{3}{4}$.

当 $x = 0$ 时,有极大值 $y = 1$.

当 $x = \pm\frac{\pi}{4}$ 时,有极小值 $y = \frac{1}{2}$.

如 1501 题图所示.

图中主要点的坐标为

$A(0,1)$,$B\left(\frac{\pi}{8},\frac{3}{4}\right)$,$C\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$.

【1502】 $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

解 函数为偶函数,图形关于 Oy 轴对称

由于 $y = \sin x \sin 3x = -\left(\cos 2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{16}$,

故函数的周期 $T = \pi$,讨论函数在一个周期

$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 内的图象

当 $x = 0, \pm\frac{\pi}{3}$ 时,$y = 0$,

$$y' = 2\sin 4x - \sin 2x.$$

令 $y' = 0$ 解得

$$x = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4},$$

$$y'' = 8\cos 4x - 2\cos 2x.$$

令 $y'' = 0$ 解得

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{2} \approx \pm 0.11\pi,$$

此时 $y_{1,2} \approx 0.29$,

$$x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}\arccos \frac{1-\sqrt{129}}{2} \approx \pm 0.36\pi,$$

此时 $y_{3,4} \approx -0.24$,

当 $x = 0$ 时,取极小值 $y = 0$.

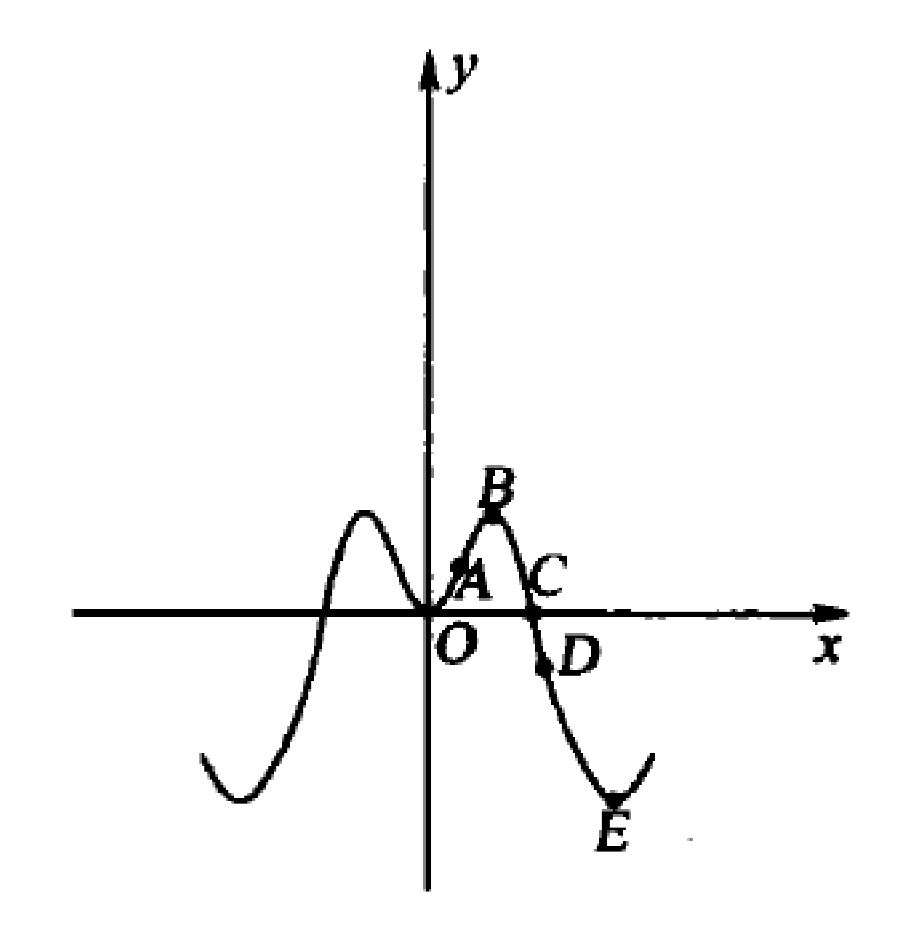
当 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 时,取极小值 $y = -1$.

当 $x = \pm \frac{1}{2}\arccos \frac{1}{4}$ 时,取极大值 $y = \frac{9}{16}$.

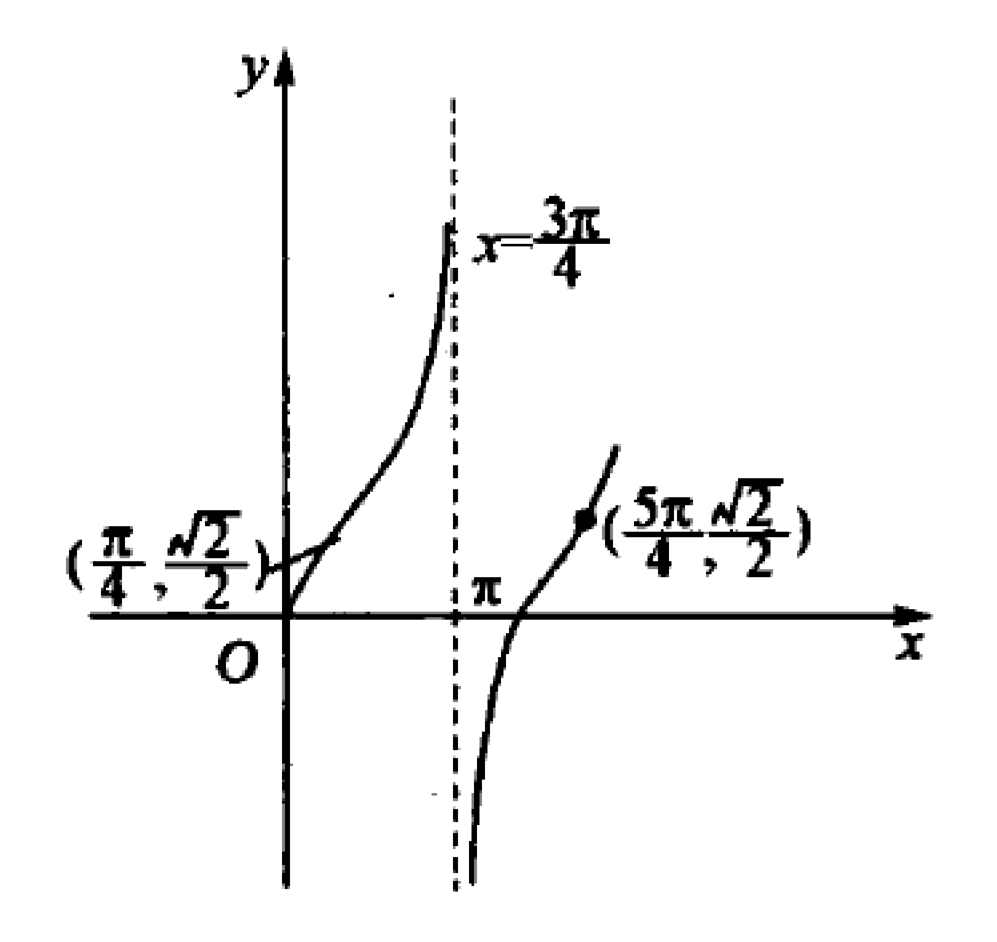
如 1502 题图所示. 图中主要点的坐标

$A(0.11\pi, 0.29)$, $B\left(0.21\pi, \frac{9}{16}\right)$, $C\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$,

$D(0.36\pi, -0.24)$, $E\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$.



1502 题图



1503 题图

【1503】 $y = \dfrac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

解　函数的周期为 $T = \pi$,讨论函数在一个周期 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 时的图形.

垂直渐近线 $x = \frac{3\pi}{4}$,

零点:　$x = 0, \pi$.

$$y'=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}>0,$$

无极值,图形上升

$$y''=-\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

令 $y''=0$,得 $x=\frac{\pi}{4}$,此时 $y=\frac{\sqrt{-2}}{2}$,$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$为曲线的拐点.如1503题图.

【1504】 $y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$.

解 图形关于 Oy 轴对称,函数的周期 $T=2\pi$,讨论函数在一个周期 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内的图形.

零点: $x=\pm\frac{\pi}{2}$.

渐近线: $x=\pm\frac{\pi}{4}$, $x=\pm\frac{3\pi}{4}$,

$$y'=\frac{\sin x(1+2\cos^2 x)}{\cos^2 2x}.$$

令 $y'=0$ 得 $x=0,\pm\pi$,

$$y''=\frac{1}{\cos^3 2x}[3\cos x\cos^2 2x+4\sin 2x\sin x(1+2\cos^2 x)].$$

令 $y''=0$ 得 $x=\pm\frac{\pi}{2}$,此时 $y=0$.

点$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$为曲线的拐点.

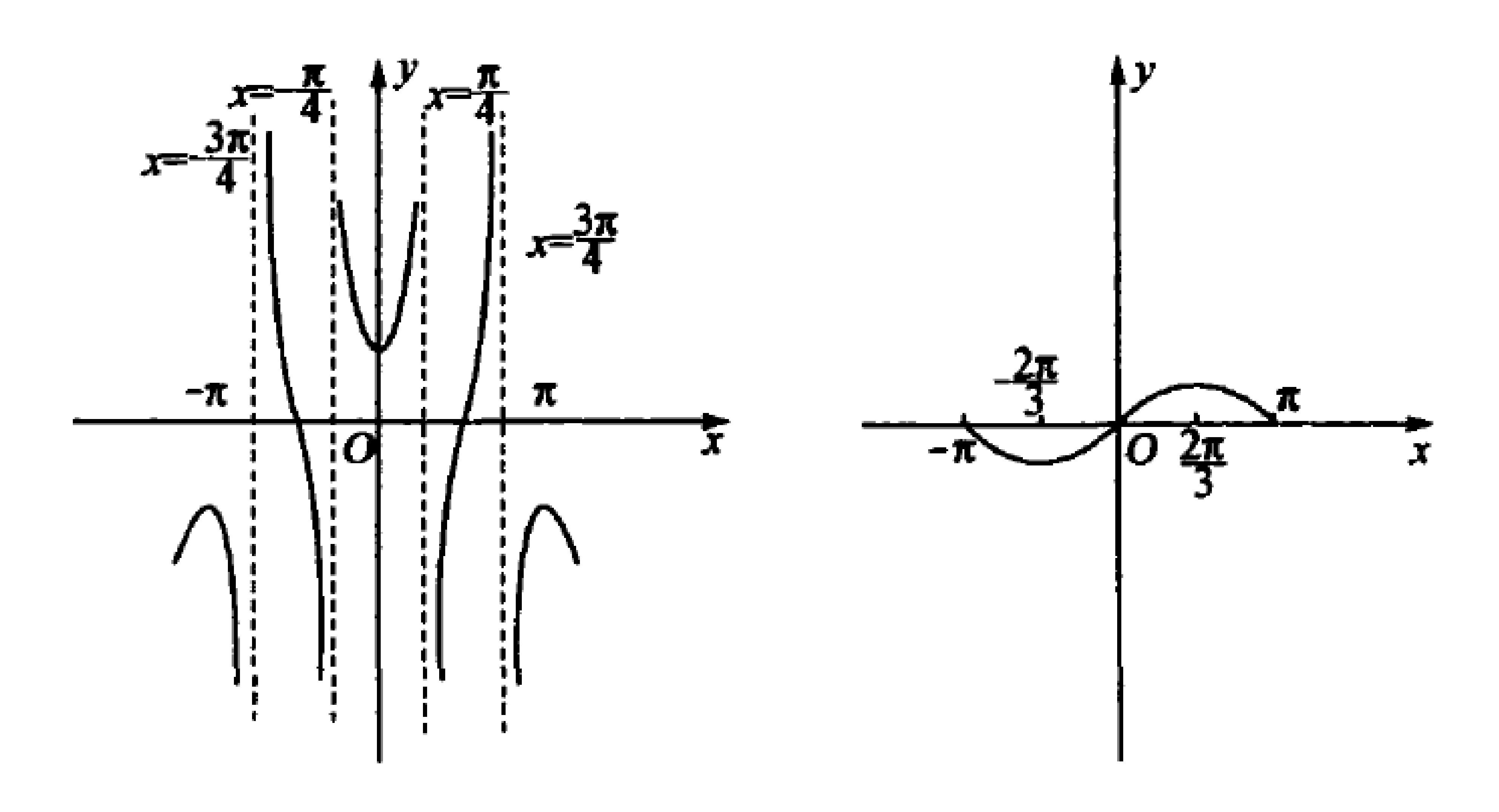
当 $x=0$ 时,有极小值 $y=1$.

当 $x=\pm\pi$ 时,有极大值 $y=-1$.

当 $0<x<\pi$ 时 $y'>0$,曲线上升.

当 $-\pi < x < 0$ 时 $y' < 0$，曲线下降.

如 1504 题图.



1504 题图　　　　1504.1 题图

【1504.1】　$y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

解　函数为奇函数，图形关于坐标原点对称，函数的周期 $T = 2\pi$，讨论函数在一个周期 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 内的图形

零点：　$x = 0, \pm\pi$，

$$y' = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}.$$

令 $y' = 0$，解得 $x = \pm\dfrac{2\pi}{3}$，

$$y'' = \frac{2\sin x(\cos x + 1)}{(2 + \cos x)^3}.$$

令 $y'' = 0$ 解得 $x = 0, \pm\pi$.

经判别知 $x = 0, \pm\pi$，为曲线的拐点，此时 $y = 0$.

当 $x = \dfrac{2\pi}{3}$ 时，取极大值 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

当 $x = -\dfrac{2\pi}{3}$ 时，取极小值 $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

当 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时，$y=-\frac{1}{2}$.

如 1504.1 题图所示.

【1505】 $y=2x-\tan x$.

解 零点：$x=0, x\approx 0.37\pi, \cdots$

对称中心$(k\pi, 2k\pi)$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

渐近线：

$$x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$y'=2-\sec^2 x.$$

令 $y'=0$ 得

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4},$$

及
$$x=-\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right).$$

当 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ 时，有极大值，

$$y=2k\pi+\frac{\pi}{2}-1.$$

当 $x=-\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$时，有极小值，

$$y=-\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}-1\right) \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$y''=-2\sec^2 x\tan x.$$

令 $y''=0$ 得 $x=k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

经判别知.这些都是拐点.

如 1505 题图所示.

【1506】 $y=e^{2x-x^2}$.

解 $y>0$.故图形在 Ox 轴上方

$$y=e^{2x-x^2}=e^{-(x-1)^2+1},$$

于是图形关于直线 $x=1$ 对称.又

$$\lim_{x\to\infty} y = 0,$$

所以 $y=0$ 为曲线的渐近线

$$y' = (2-2x)\cdot e^{2x-x^2}.$$

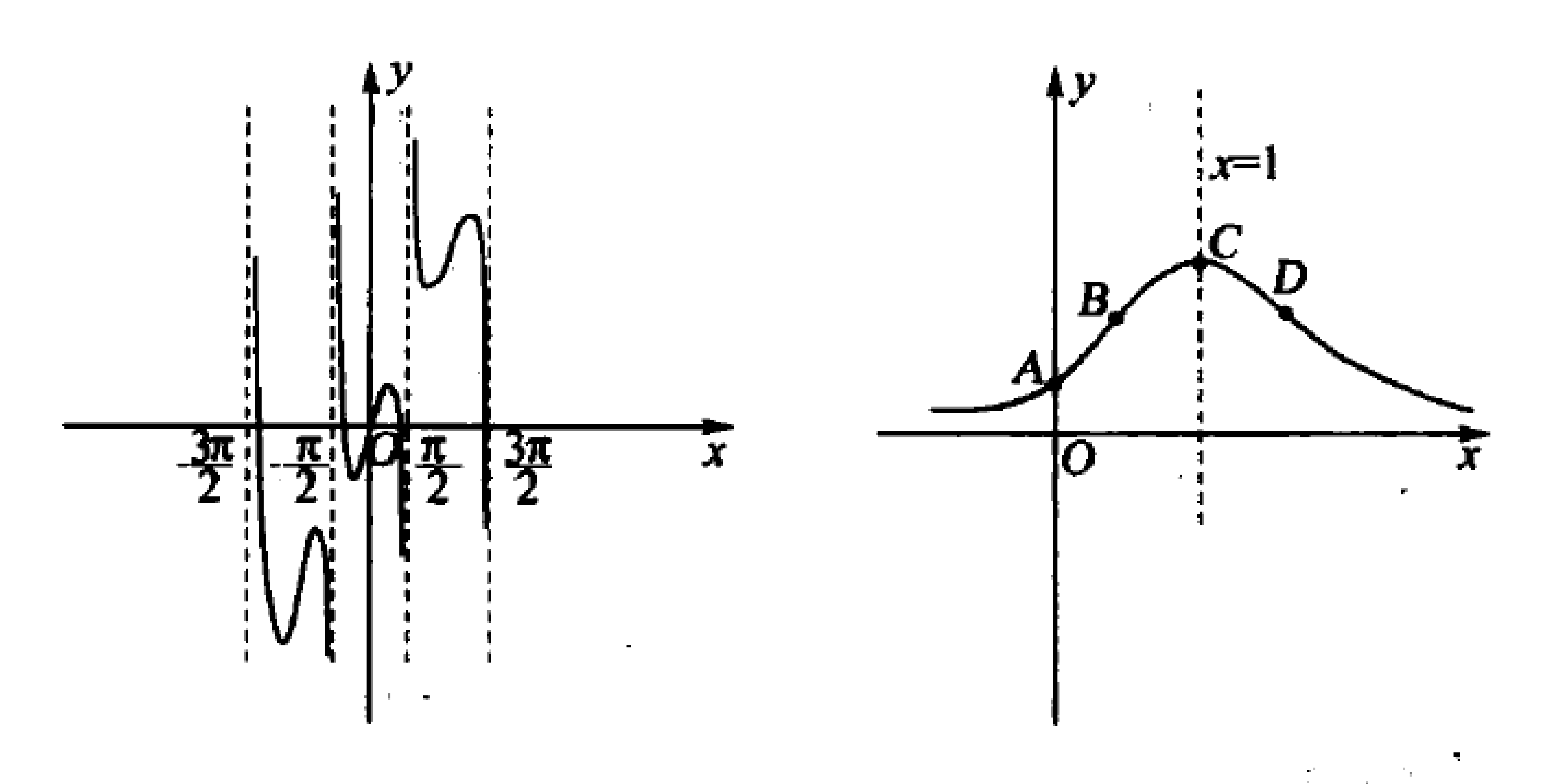
令 $y'=0$,得 $x=1$.

当 $x<1$ 时,$y'>0$. 当 $x>1$ 时,$y'<0$ 知当 $x=1$ 时,有极大值 $y=e$,

$$y'' = 2(2x^2-4x+1)e^{2x-x^2}.$$

令 $y''=0$,解得 $x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

经判别知它们为拐点,此时 $y=\sqrt{e}\approx 1.65$



1505 题图　　　　1506 题图

如 1506 题图所示. 图中各点的坐标

$$A(0,1),\quad B\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right),\quad C(1,e),\quad D\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},e\right).$$

【1507】 $y=(1+x^2)e^{-x^2}$.

解　$y>0$,曲线在 Ox 轴的上方,图形关于 Oy 轴对称,$y=0$ 为曲线的渐近线

$$y' = -2x^3e^{-x^2},$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$,

$$y'' = 2x^2(2x^2-3)e^{-x^2}.$$

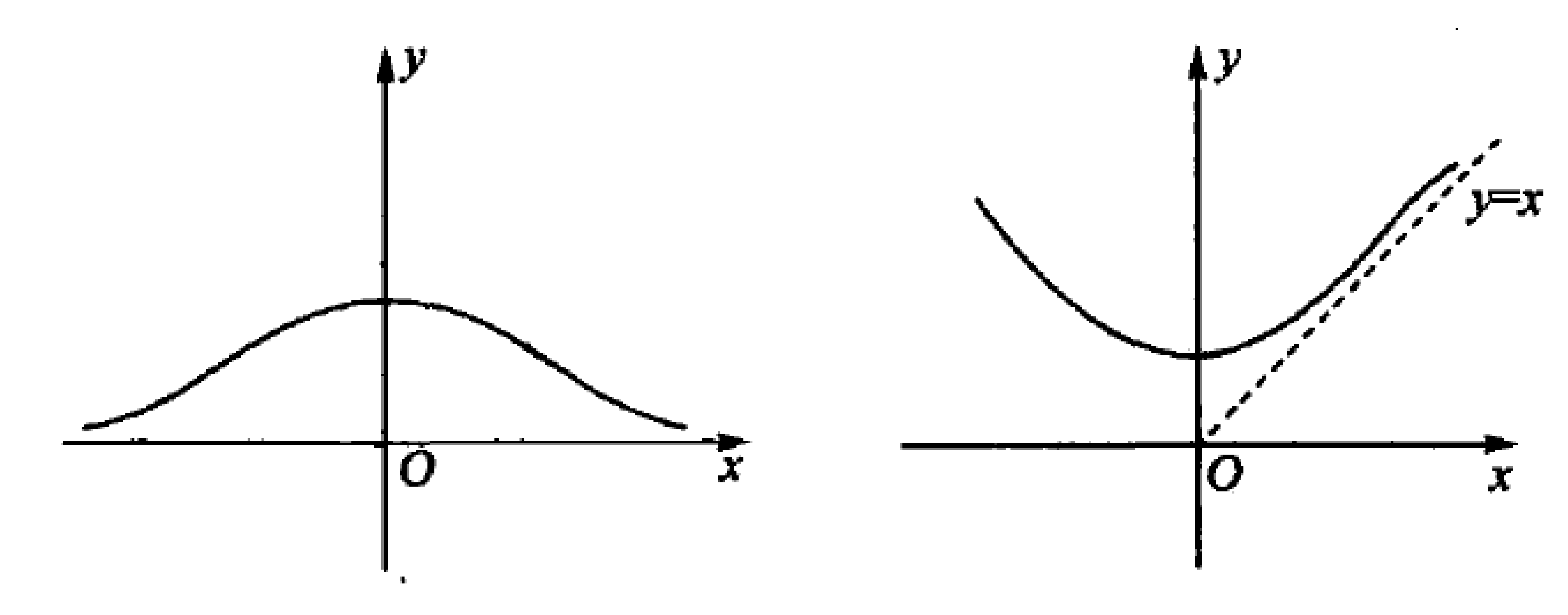
令 $y''=0$ 得 $x=0$ 及 $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

列表

x	$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$	0	$\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	0	−	0	+
y	↗⌣	拐点	↗⌢	极大值	↘⌢	拐点	↘⌣

当 $x=0$ 时, $y=1$. 当 $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\approx\pm1.22$ 时, $y=\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}\approx$ 0.56.

如 1507 题图所示.



1507 题图　　1508 题图

【1508】 $y=x+e^{-x}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=0$,

所以 $y=x$ 为曲线的斜渐近线, 又

$$y'=1-e^{-x}.$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$, 此时有极小值 $y=1$,

$$y''=e^{-x}>0.$$

故曲线是凹的.

如 1508 题图所示.

【1509】 $y=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

解 零点: $x=0$, 又

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{3}}e^{-x}=0,$$

所以 $y=0$ 为曲线的渐近线

$$y'=-x^{-\frac{1}{3}}e^{-x}\left(x-\frac{2}{3}\right).$$

令 $y'=0$,得 $x=\frac{2}{3}$.

当 $x=0$ 时,$y'=\infty$,

易知,当 $x=0$ 时,有极小值 $y=0$,且(0,0) 为尖点.

当 $x=\frac{2}{3}$ 时,有极大值 $y=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}}\approx 0.39$,

$$y''=\frac{1}{9}e^{-x}x^{-\frac{4}{3}}(9x^2-12x-2).$$

令 $y''=0$ 得

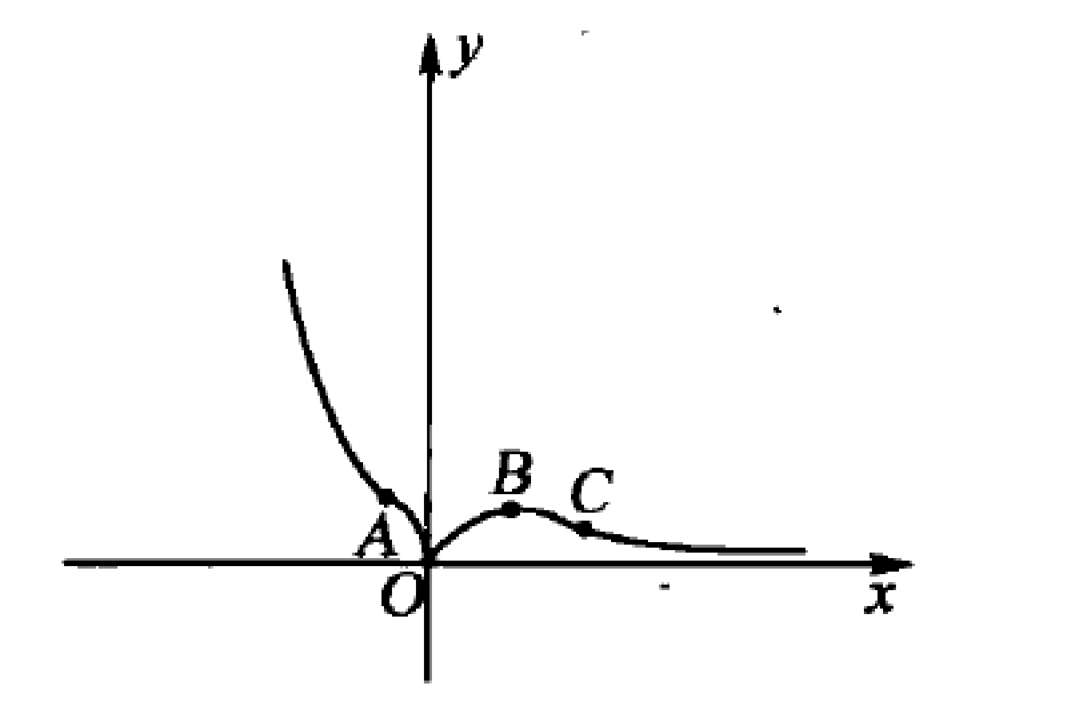
$$x_1=\frac{2-\sqrt{6}}{3}\approx -0.15, y\approx 0.34,$$

$$x_2=\frac{2+\sqrt{6}}{3}\approx 1.48, y\approx 0.30.$$

易知点(x_1,y_1),(x_2,y_2) 均为拐点.

如 1509 题图所示,图中主要点的坐标.

$A(-0.15,0.34)$, $B\left(\frac{2}{3},0.39\right)$, $C(1.48,0.30)$.



1509 题图

1509.1 题图

【1509.1】 $y=e^{-2x}\sin^2 x$.

解 零点:

$$x = k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots),$$

$$y' = 2\sin x(\cos x - \sin x)e^{-2x}.$$

令 $y' = 0$,解得

$$x = k\pi,$$

及 $$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

$$y'' = 2(1 - 2\sin 2x)e^{-2x}.$$

令 $y'' = 0$,解得

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

及 $$x = k\pi + \frac{5\pi}{6} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

经判别知这些都是拐点

又 $y''|_{x=k\pi} > 0$,所以当 $x = k\pi$ 时,取极小值 $y = 0$,

$y''|_{x=k\pi+\frac{\pi}{4}} < 0$,所以当 $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ 时,取极大值

$$y = \frac{1}{2}e^{-\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)},$$

如 1509.1 所示(仅描绘了 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 内的图形).

【1510】 $y = \dfrac{e^x}{1+x}$.

解 当 $x < -1$ 时,$y < 0$,

当 $x > -1$ 时,$y > 0$,

不连续点 $x = -1$,垂直渐近线:$x = -1$;

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$. 所以 $y = 0$ 为曲线的水平渐近线

$$y' = \frac{xe^x}{(1+x)^2}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$,易知

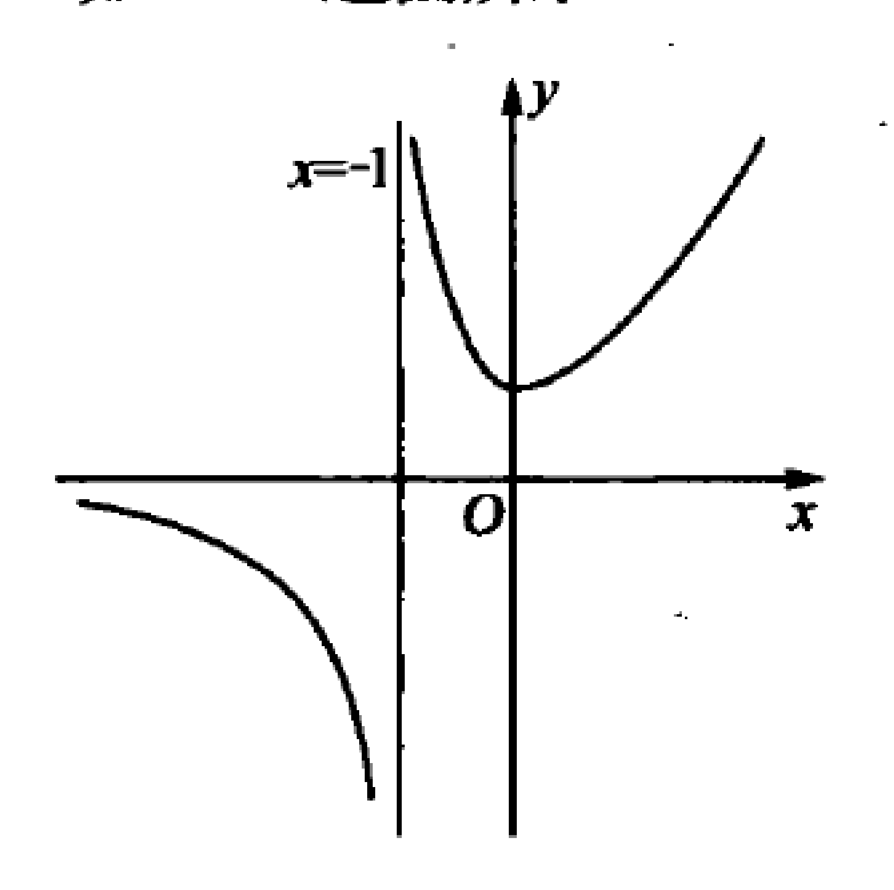
当 $x = 0$ 时,有极小值 $y = 1$,

$$y'' = \frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^3}.$$

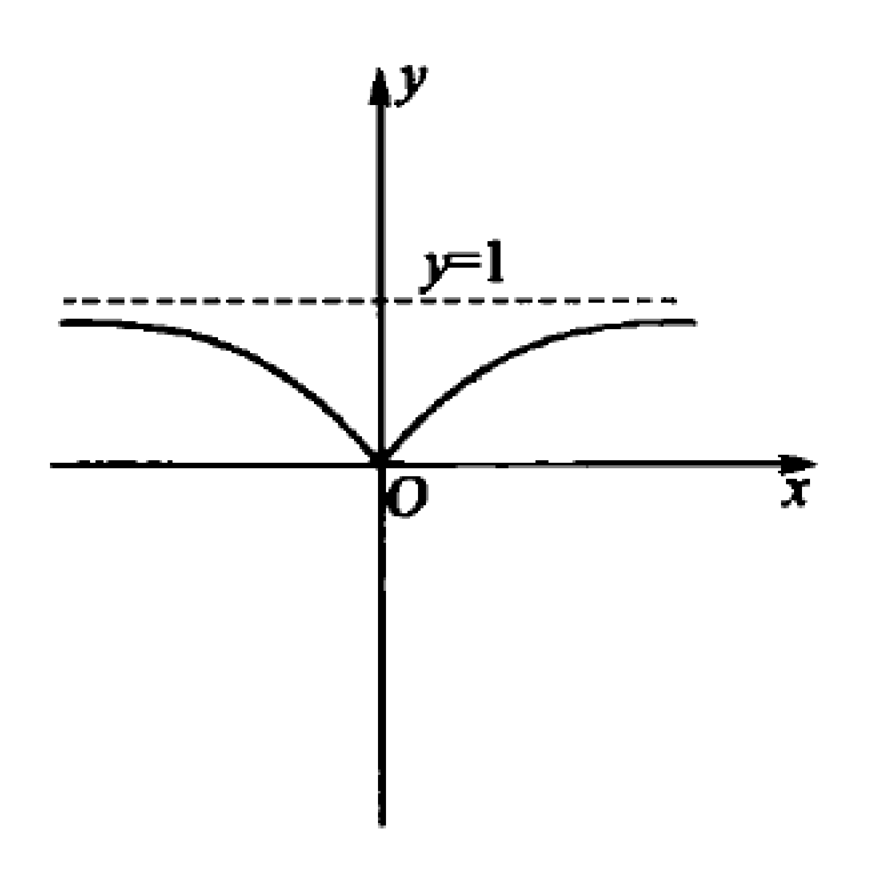
当 $x < -1$ 时,$y'' < 0$,故图形是凸的.

当 $x>-1$ 时，$y''>0$，故图形是凹的.

如 1510 题图所示



1510 题图



1511 题图

【1511】 $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

解　图形关于 Oy 轴对称

零点：$x=0$ 且 $y\geqslant 0$. 图形在 Ox 轴的上方，又

$$\lim_{x\to\infty} y=1,$$

所以 $y=1$ 为曲线的水平渐近线

$$y'=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

当 $x<0$ 时，$y'<0$，曲线下降.

当 $x>0$ 时，$y'>0$，曲线上升.

所以当 $x=0$ 时，有极小值 $y=0$，又 $y''|_x=0=\infty$. 故(0,0) 为尖点

$$y''=e^{-x^2}\frac{1-3x^2-e^{-x^2}+2x^2e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})\sqrt{1-e^{-x^2}}}<0\qquad (x\neq 0),$$

故图形呈凸状.

如 1511 题图所示.

【1512】 $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

解　存在域：$x>0$.

当 $x=1$ 时，$y=0$.

又 $$\lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0,$$

故 $x=0,y=0$ 为曲线的渐近线

$$y'=\frac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $y'=0$,得 $x=e^2\approx7.4$,

易知当 $x=e^2$ 时有极大值

$$y=\frac{2}{e}\approx0.74, y''=\frac{3\ln x-8}{4x^{\frac{5}{2}}}.$$

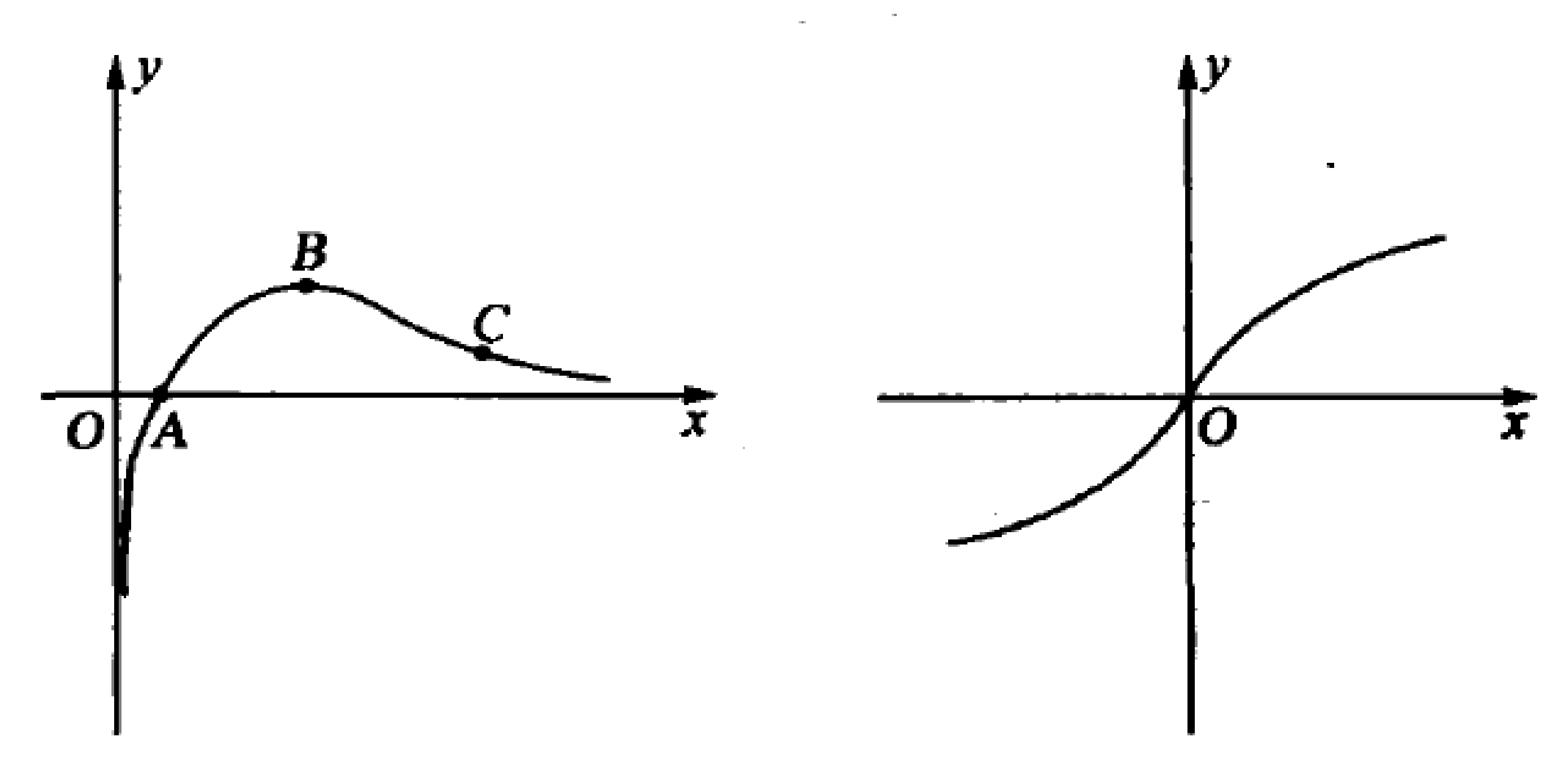
令 $y''=0$ 得 $x=e^{\frac{8}{3}}\approx14.39$,

此时 $$y=\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\approx0.70,$$

显然这是拐点

如 1512 题图所示,图中主要点的坐标

$A(1,0)$, $B(7.40,0.74)$, $C(14.33,0.70)$.



1512 题图　　　1513 题图

【1513】 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 函数为奇函数,图形关于坐标原点对称

当 $x=0$ 时 $y=0$,

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0,$$

故函数单调增加，无极值

$$y'' = \frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $y''=0$，得 $x=0$，此时 $y=0$，

显然点(0,0) 为曲线的拐点，当 $x>0$ 时，$y''<0$，图形为凸的；当 $x<0$ 时，$y''>0$，图形为凹的.

如 1513 题图所示.

【1514】 $y=\sqrt{x^2+1}\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解　图形关于坐标原点对称

零点：　$x=0$，

$$y' = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$y'' = \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

当 $x>0$ 时，$y''>0$，图形为凹的，

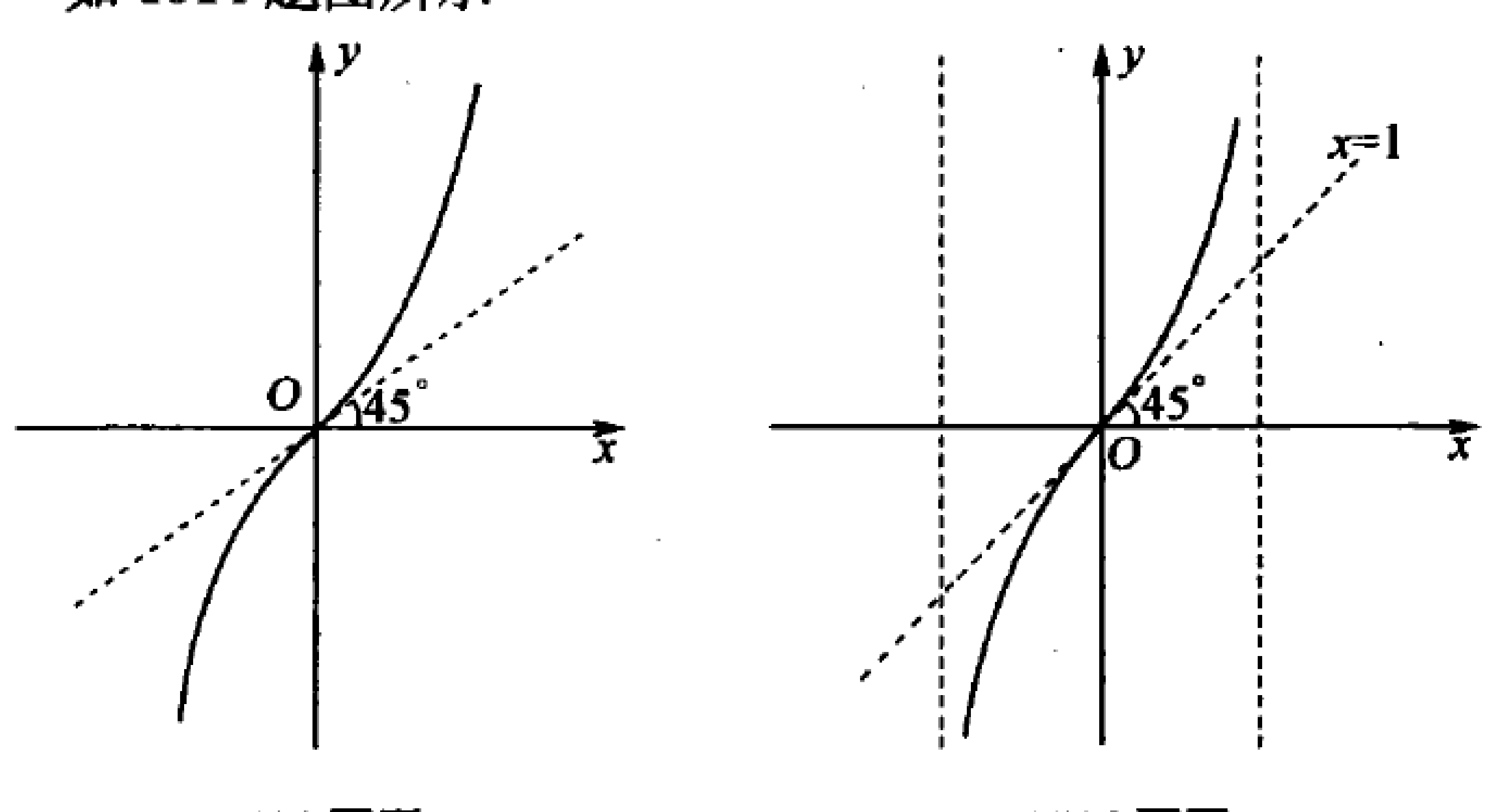
当 $x<0$ 时，$y''<0$，图形为凸的，

点(0,0) 为拐点.

因此　$y'(x)\geqslant y'|_{x=0}=1>0$，

从而函数是单调增加的.

如 1514 题图所示



1514 题图　　1515 题图

【1515】 $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 存在域：$|x|<1$,

图形关于坐标原点对称，零点：$x=0$,

渐近线 $x=\pm 1$,

$$y'=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}>0 \qquad (|x|<1),$$

故函数严格单调增加.

$$y''=\frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $y''=0$ 得 $x=0$.

当 $-1<x<0$, $y''<0$. 故图形是凸的.

当 $0<x<1$, $y''>0$. 故图形是凹的.

点(0,0)为拐点，在此点切线的斜率 $k=1$.

如1515题图所示.

【1516】 $y=x+\arctan x$.

解 图形关于坐标原点对称

当 $x=0$ 时 $y=0$,

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x\to-\infty}(y-x)=-\frac{\pi}{2},$$

故 $y=x+\frac{\pi}{2}$ 及 $y=x-\frac{\pi}{2}$ 为曲线的渐近线

$$y'=1+\frac{1}{1+x^2}>0.$$

故图形始终上升，无极值点

$$y''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

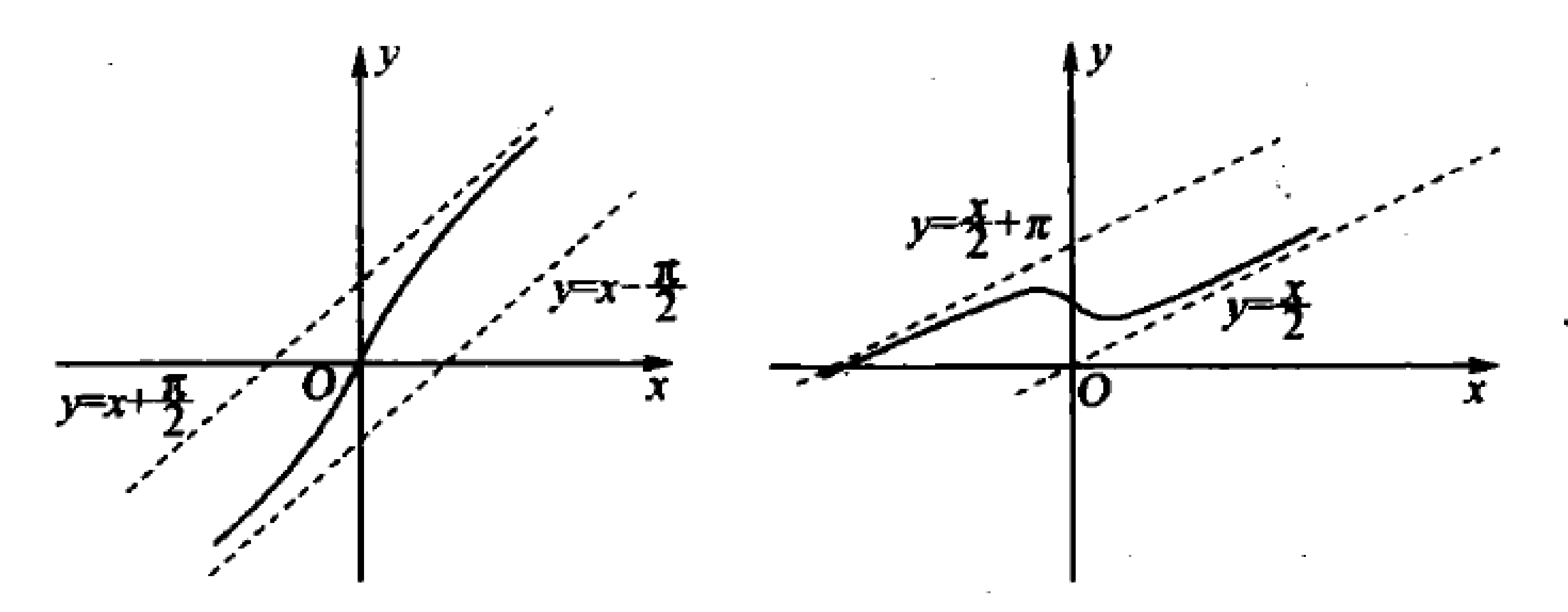
令 $y''=0$ 得 $x=0$.

当 $x<0$ 时，$y''>0$ 图形为凹的；

当 $x>0$ 时，$y''<0$ 图形为凸的；

(0,0)为拐点.

如 1516 题图所示.



1516 题图　　　　1517 题图

【1517】 $y = \frac{x}{2} + \text{arccot} x$.

解　零点 $x \approx -5.95$,而

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{2} + \text{arccot} x}{x} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(y - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to-\infty} \text{arccth} x = \pi,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(y - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \text{arccth} x = 0,$$

所以 $y = \frac{1}{2}x$ 及 $y = \frac{1}{2}x + \pi$ 为曲线的渐近线

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2},$$

令 $y' = 0$,得 $x = \pm 1$.

当 $x < -1$ 及 $x > 1$ 时,$y' > 0$,曲线上升.

当 $-1 < x < 1$ 时,$y' < 0$,曲线下降.

故当 $x = 1$ 时,有极小值 $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \approx 1.285$.

当 $x = -1$ 时,有极大值 $y = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \approx 1.856$,

$$y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

令 $y'' = 0$,得 $x = 0$.

当 $x < 0$ 时,$y'' < 0$,故曲线是凸的.

当 $x>0$ 时，$y''>0$，故曲线是凹的，从而 $x=0$ 为拐点

此时 $y=\frac{\pi}{2}$. 如 1517 题图所示.

【1518】 $y=x\arctan x$.

解 图形关于 Oy 轴对称，且 $y\geqslant 0$，图形在 Ox 轴的上方，零点：$x=0$

而
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(y-\frac{\pi}{2}x\right)=-1,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\left(y+\frac{\pi}{2}x\right)=-1,$$

所以 $y=\frac{\pi}{2}x-1$，$y=-\frac{\pi}{2}x-1$ 为曲线的渐近线.

$$y'=\frac{x}{1+x^2}+\arctan x.$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$.

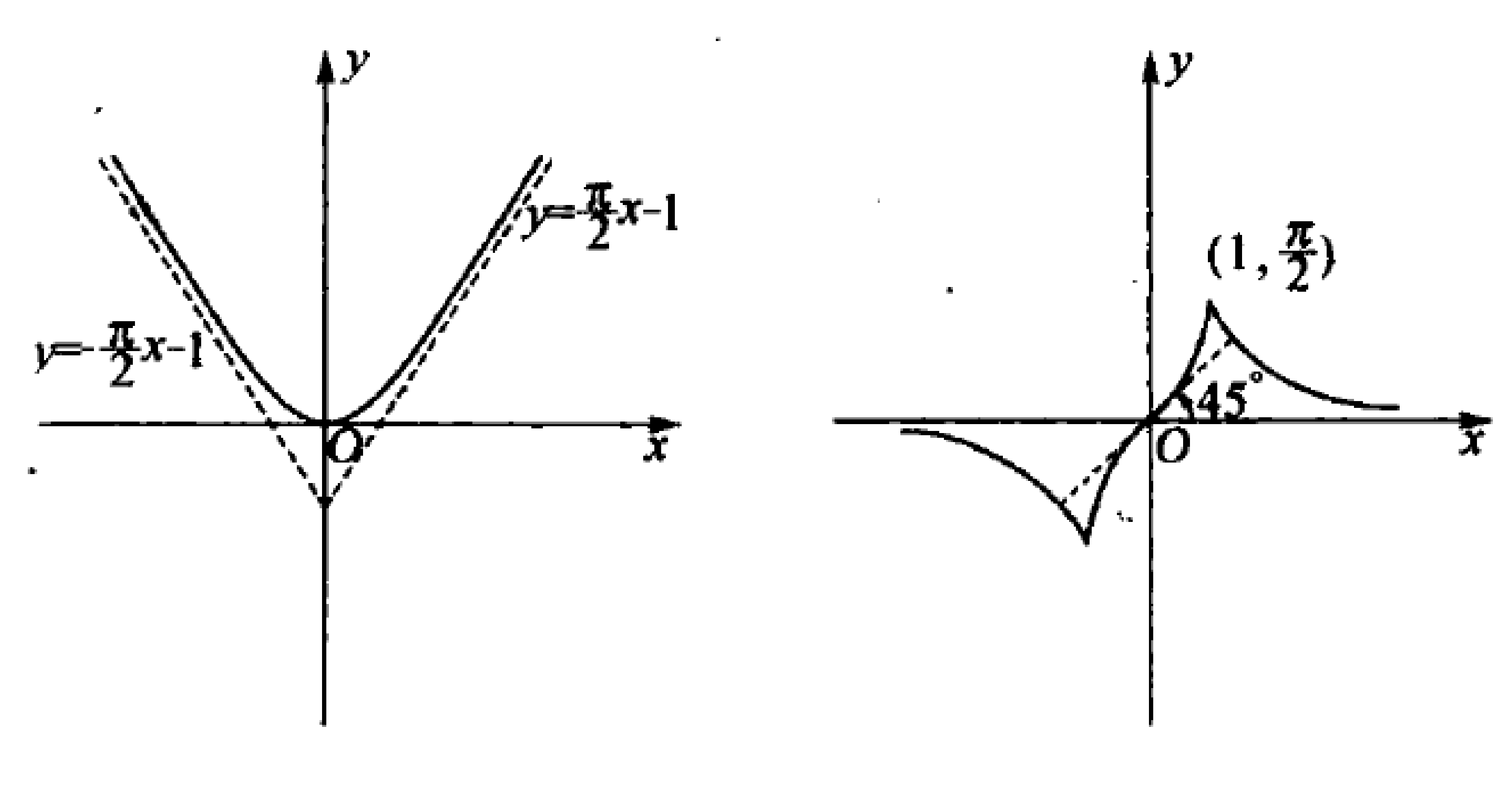
当 $x<0$ 时，$y'<0$，图形下降.

当 $x>0$ 时，$y'>0$，图形上升.

故当 $x=0$ 时，有极小值 $y=0$，

$$y''=\frac{2}{(1+x^2)^2}>0,$$

故图形是凹的，如 1518 题图.



1518 题图　　　　1519 题图

【1519】 $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

解 图形关于坐标原点对称.

当 $x = 0$ 时, $y = 0$,

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0,$$

所以, $y = 0$ 为曲线的渐近线.

$$y' = \frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2} \qquad (|x| \neq 1).$$

当 $|x| < 1$ 时, $y' > 0$, 图形上升.

当 $|x| >$ 时, $y' < 0$, 图形下降.

当 $x = 1$ 时, 由定义可得

$$y'_-(1) = 1, y'_+(1) = -1,$$

故点 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 为角点, 且当 $x = 1$ 时, 有最大值 $y = \frac{\pi}{2}$, 由对称性知点 $\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$ 也为角点, 并且当 $x = -1$ 时, 有最小值 $y = -\frac{\pi}{2}$.

$$y'_-(-1) = -1, y'_+(-1) = 1,$$

$$y'' = \frac{-4x\operatorname{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = 0$, 容易验证 $x = 0$ 为拐点.

当 $x = 0$ 时, $y'|_{x=0} = 1$, 如 1519 题图所示.

【1520】 $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

零点: $x = 0$,

又 $\lim_{x \to \infty} y = \pi$, 所以 $y = \pi$ 为曲线的渐近线

$$y' = \frac{2\operatorname{sgn}x}{1+x^2} \qquad (x \neq 0).$$

当 $x > 0$ 时 $y' > 0$, 曲线上升.

当 $x < 0$ 时 $y' < 0$, 曲线下降.

由定义直接计算得 $y'_+(0) = 2, y'_-(0) = -2$,

故(0,0) 为角点,且当 $x=0$ 时,有最小值 $y=0$,

$$y''=-\frac{4x\operatorname{sgn}x}{(1+x^2)^2}<0,$$

图形为凸的.如 1520 题图所示.

【1521】 $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

解 零点 $x=-2$,不连续点 $x=0$,

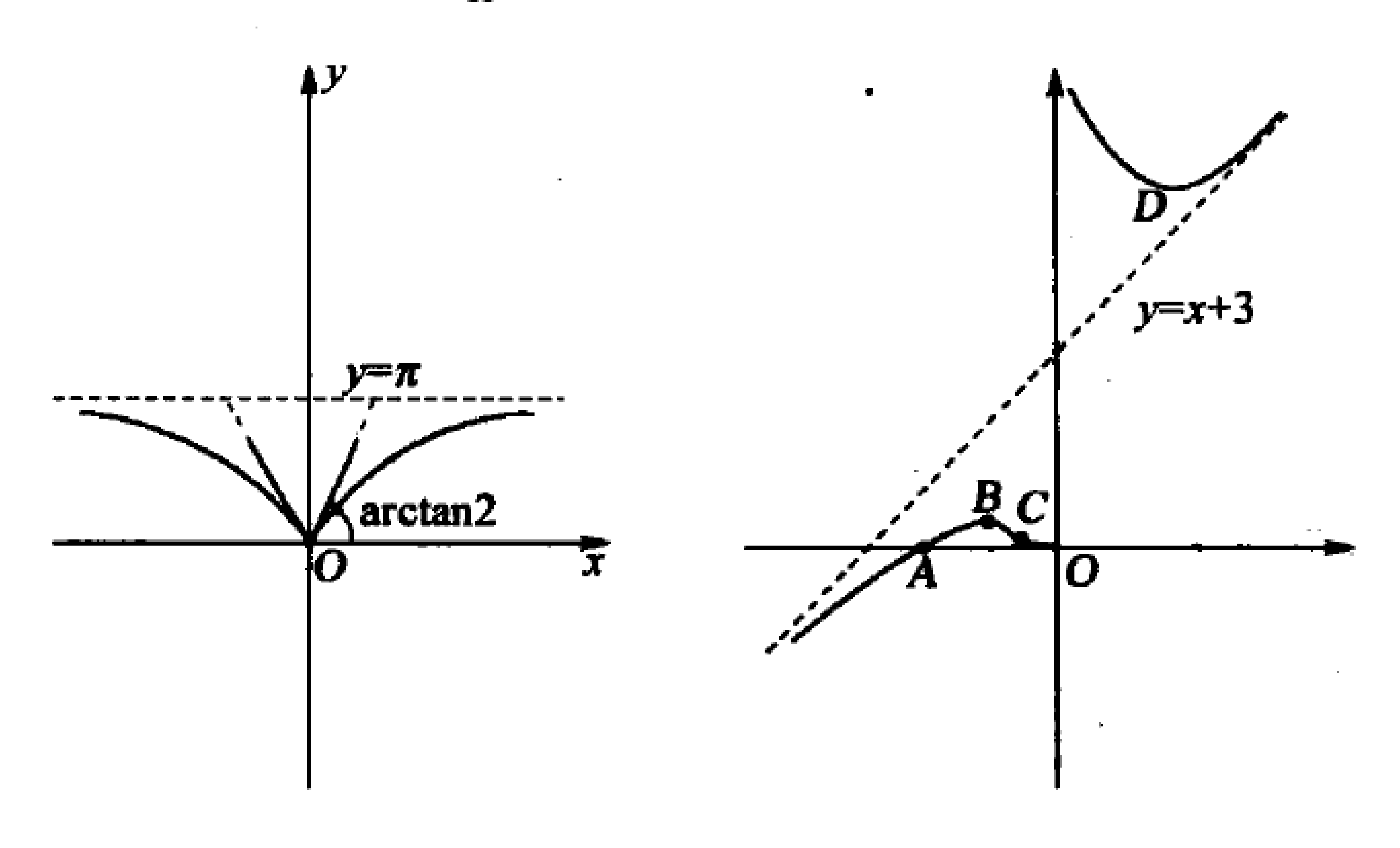
而 $\lim\limits_{x\to+0}y=+\infty$,$x=0$ 为垂直渐近线,$\lim\limits_{x\to-0}y=0$,

又 $$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[3+x+0\left(\frac{1}{x}\right)-x\right]=3,$$

故 $y=x-3$ 为渐近线.

$$y'=e^{\frac{1}{x}}\frac{x^2-x-2}{x^2}.$$



1520 题图 1521 题图

令 $y'=0$,得 $x=-1$ 及 $x=2$.

当 $0<x<2$ 时,$y'<0$,图形下降.

当 $x>2$ 时,$y'>0$,图形上升.

故当 $x=2$ 时,有极小值

$$y = 4e^{\frac{1}{2}} \approx 6.59.$$

当 $-\infty < x < -1$ 时，$y' > 0$，图形上升.

当 $-1 < x < 0$ 时，$y' < 0$，图形下降.

故当 $x = -1$ 时，有极大值.

$$y = e^{-1} \approx 0.37,$$

$$y'' = e^{\frac{1}{x}} \frac{5x+2}{x^4}.$$

令 $y'' = 0$，得 $x = -\frac{2}{5}$.

当 $x < -\frac{2}{5}$ 时，$y'' < 0$，图形是凸的.

当 $x > -\frac{2}{5}$ 时，$y'' > 0$，图形是凹的.

故 $x = -\frac{2}{5}$ 为拐点，此时

$$y = \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \approx 0.13.$$

如 1521 题图所示，图中主要点的坐标 $A(-2,0)$，$B(-1,0.37)$，$C(-0.40,0.13)$，$D(2,6.59)$.

【1522】 $y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

解　存在域 $|x| \geqslant 1$，图形关于 Oy 轴对称，又

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} 2^{\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}} = 1,$$

故 $y = 1$ 为渐近线.

当 $x = \pm 1$ 时，有边界的极大值 $2^{\sqrt{2}} \approx 2.67$，

$$y'_+(1) = -\infty,$$

$$y'_-(-1) = +\infty,$$

$$y' = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right).$$

当 $x < -1$ 时，$y' > 0$，曲线上升.

当 $x > 1$ 时，$y' < 0$，曲线下降.

$$y'' = (\ln 2)^2 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2$$

$$+(\ln 2)\cdot 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}+\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\right)>0,$$

故曲线始终是凹的.

【1523*】 $y=\ln\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$.

解 存在域$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$,

而 $$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}=0,$$

所以 $y=0$ 为渐近线,$x=1$,及 $x=2$ 为垂直渐近线

$$y'=\frac{3x^2-2x-3}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}.$$

令 $y'=0$ 得

$$x=\frac{1-\sqrt{10}}{3}\approx-0.72.$$

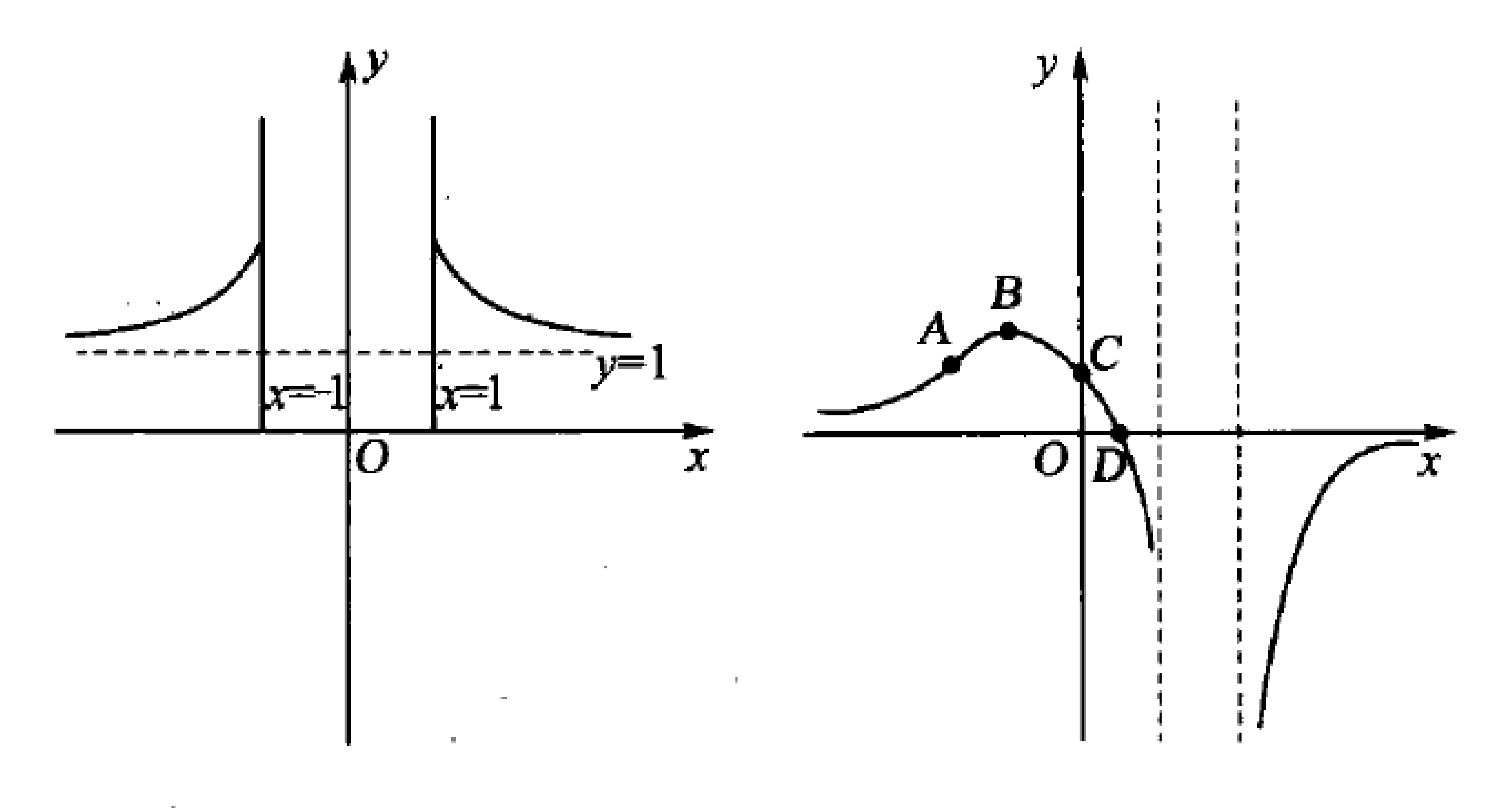
易证,当 $x\approx-0.72$ 时有极大值 $y\approx1.12$,

$$y''=\frac{-6x^5+15x^4-30x^2+30x-13}{(x-1)^2(x-2)^2(x^2+1)^2}$$

令 $y''=0$,得 $x\approx-1.49$,判别其为拐点,此时 $y\approx\ln 2.7$.

当 $x<-1.49$ 时,$y''>0$,图形是凹的.

当 $x>-1.49$ 时,$y''<0$,图形是凸的.



1522 题图　　　　1523 题图

如 1523 题图所示,图中主要点的坐标 $A(-1.49,\ln 2.7)$,

$B(-0.72,1.12)$，$C(0,\ln 2)$，$D\left(\frac{1}{3},0\right)$.

【1524】 $y=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}\qquad(a>0)$.

解　存在域 $|x|\leqslant a$，

$$y'=\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}>0\qquad(|x|<a),$$

故图形单调上升，又

$$y'_-(a)=+\infty,y'_+(-a)=0,$$

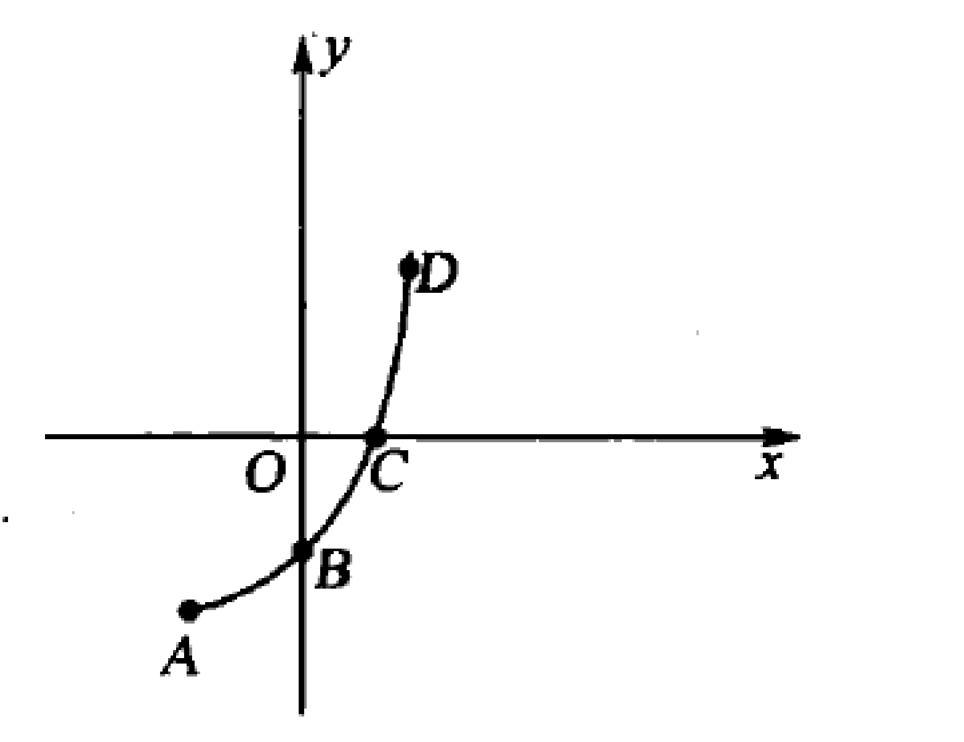
$$y''=\frac{a(a+x)}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}>0,$$

故图形是凹的.

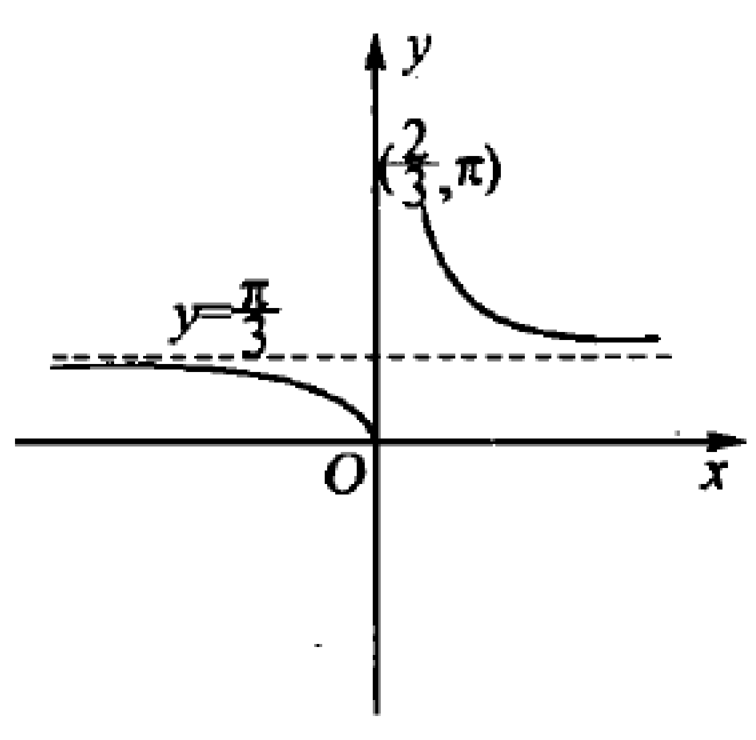
当 $x=0$ 时，$y=-a$，当 $x=-a$ 时，$y=-\frac{\pi}{2}a$.

当 $x=a$ 时，$y=\frac{\pi}{2}a$，当 $y=0$ 时，$x\approx 0.67a$.

如 1524 题图所示，$A\left(-a,-\frac{\pi}{2}a\right)$，$B(0,-a)$，$C(0.67a,0)$，$D\left(a,\frac{\pi}{2}a\right)$.



1524 题图



1525 题图

【1525】 $y=\arccos\frac{1-x}{1-2x}$.

解　存在域 $(-\infty,0]\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$，

而 $$\lim_{x\to\infty}\arccos\frac{1-x}{1-2x}=\frac{\pi}{3},$$

所以 $y=\frac{\pi}{3}$ 为曲线的渐近线.

当 $x=0$ 时,有边界极小值 $y=0$.

当 $x=\frac{2}{3}$ 时,有边界极大值 $y=\pi$.

$$y'=-\frac{\operatorname{sgn}(1-2x)}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}},$$

$$y''=\begin{cases}\dfrac{9x-12x^2-1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}}(1-2x)^2} & 当\ x\leqslant 0\ 时,\\[2ex] \dfrac{12x^2-9x+1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}}(1-2x)^2} & 当\ x\geqslant\frac{2}{3}\ 时,\end{cases}$$

当 $x\in(-\infty,0]\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$时,$y'<0$,图形下降.

当 $x\leqslant 0$ 时,$y''<0$,图形是凸的.

当 $x\geqslant\frac{2}{3}$ 时,$y''>0$,图形是凹的.

$$y'_-(0)=-\infty,y'_+\left(\frac{2}{3}\right)=-\infty.$$

如 1525 题图所示.

【1526】 $y=x^x$.

解 只讨论 $x>0$ 的情况,此时 $y>0$. 故图形在 Ox 轴上方.

$$y'=x^x(1+\ln x).$$

令 $y'=0$,得 $x=\frac{1}{e}$.

当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时,$y'<0$,图形下降.

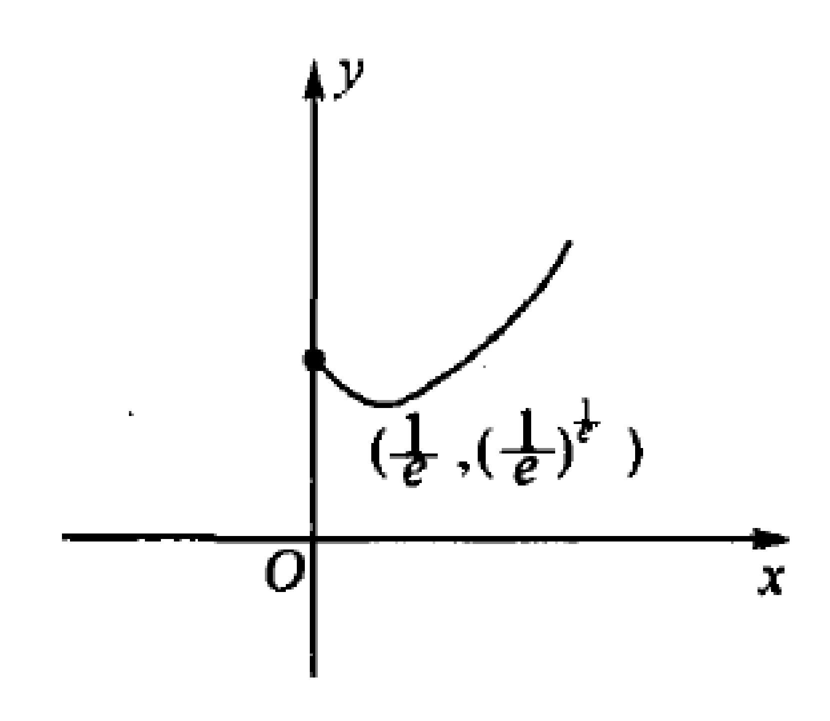
当 $\frac{1}{e}<x<+\infty$ 时,$y'>0$,图形上升.

所以,当 $x=\frac{1}{e}$ 时,有最小值 $y=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\approx 0.69$,

$$y'' = x^x\left[(1+\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right] > 0,$$

图形是凹的. 又 $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$.

如 1526 题图所示.



1526 题图

【1527*】 $y = x^{\frac{1}{x}}$.

解 只讨论 $x > 0$ 的情况

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$,所以 $y = 1$ 为曲线的渐近线.

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

令 $y' = 0$,得 $x = e$.

当 $0 < x < e$ 时,$y' > 0$,图形上升.

当 $x > e$ 时,$y' < 0$,图形下降.

当 $x = e$ 时,有极大值 $y = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.45$.

$$y'' = x^{\frac{1}{x}-4}(1-2\ln x+\ln^2 x-3x+2x\ln x).$$

令 $y'' = 0$,得 $x \approx e^{1.48} \approx 4.39$,

事实上,令 $g(x) = 1-2\ln x+\ln^2 x-3x+2x\ln x$,

对 $g(x)$ 进行讨论知,$g(x) = 0$ 有唯一根 x_0,且

$$g(e^{\frac{1}{e}}) < 0, g(e^{\frac{3}{2}}) > 0,$$

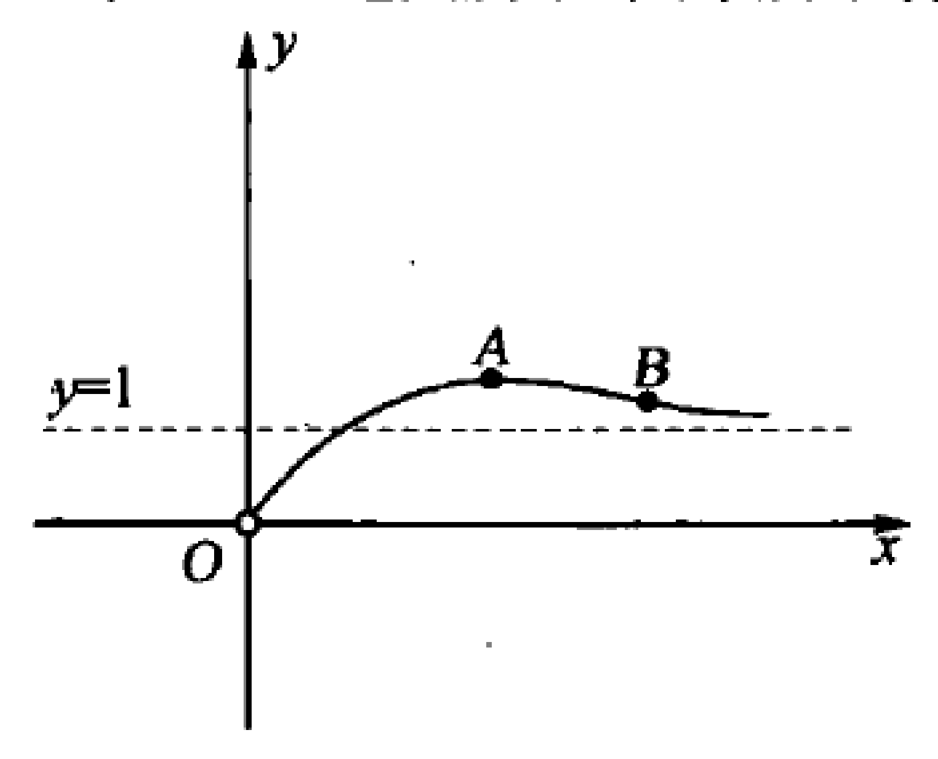
故 $\qquad e^{\frac{1}{e}} < x_0 < e^{\frac{3}{2}}$.

当 $0 < x < e^{1.48}$ 时,$y'' < 0$,图形是凸的.

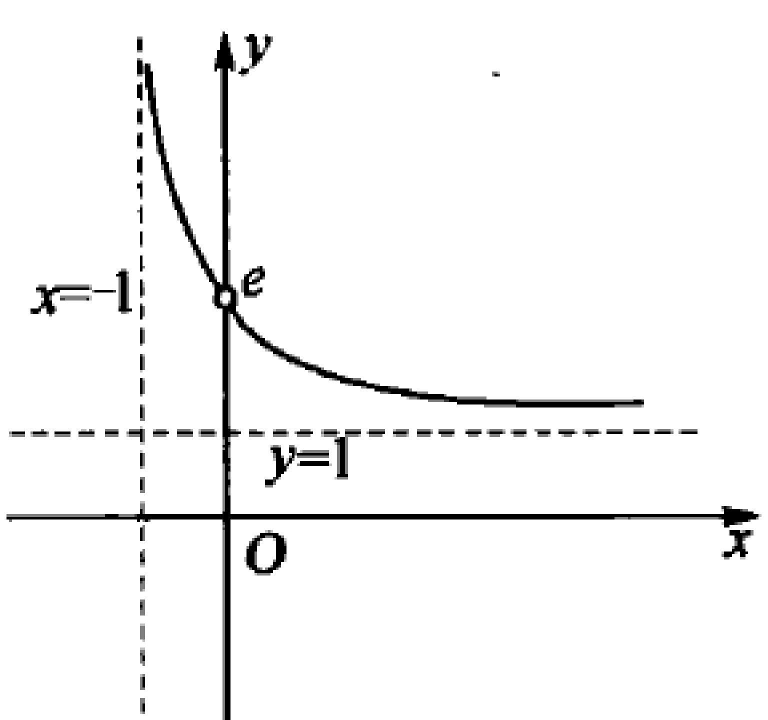
当 $x > e^{1.48}$ 时,$y'' > 0$,图形是凹的.

故 $x = e^{1.48}$ 是拐点. 又 $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{x}} = 0$.

如 1527 题图所示. 图中所示各点为 $A(\mathrm{e},1.45)$,$B(4.39,1.4)$.



1527 题图



1528 题图

【1528】 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解 定义域为 $x>-1,x\neq 0$,由 $y>0$ 知图形在 Ox 轴上方

$$y'=\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left[\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\right].$$

设 $g(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$,

则 $$g'(x)=-\frac{x}{(1+x)^2},$$

则当 $x<0$ 时,$g'(x)>0$;

当 $x>0$ 时,$g'(x)>0$,所以

$$g(x)<g(0)=0,$$

故 $y'<0$,从而图线下降.

垂直渐近线:$x=-1$,

又 $$\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=\mathrm{e}^0=1,$$

所以 $y=1$ 为曲线的水平渐近线,而 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$,

故 $x=0$ 为可去不连续点,图形是凹的.

如 1528 题图所示.

【1529*】 $y=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad (x>0)$.

解 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-ex)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}$$

$$=\lim_{t\to+0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{(1+t)}\cdot\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2}\right]$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}}{1+t}\cdot\lim_{t\to+0}\frac{-\ln(1+t)}{2t}=-\frac{e}{2},$$

所以 $y=e\left(x-\frac{1}{2}\right)$为曲线的渐近线

$$y'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x+x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right].$$

设　$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}.$

则　$g'(x)=-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}<0,$

即 $g(x)$ 单调减少，所以

$$g(x)>g(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]=0,$$

故 $y'>0$，从而曲线单调上升. 又 $\lim_{x\to+0}y=0$，

所以，函数有边界极小值 $y=0$. 如 1529 题图所示.

【1530*】　$y=\dfrac{\frac{1}{e^{1-x^2}}}{1+x^2}$　（不研究凸凹性）.

解　显然 $y>0$，图形在 Ox 轴上方.

间断点 $x=-1$ 及 $x=1$

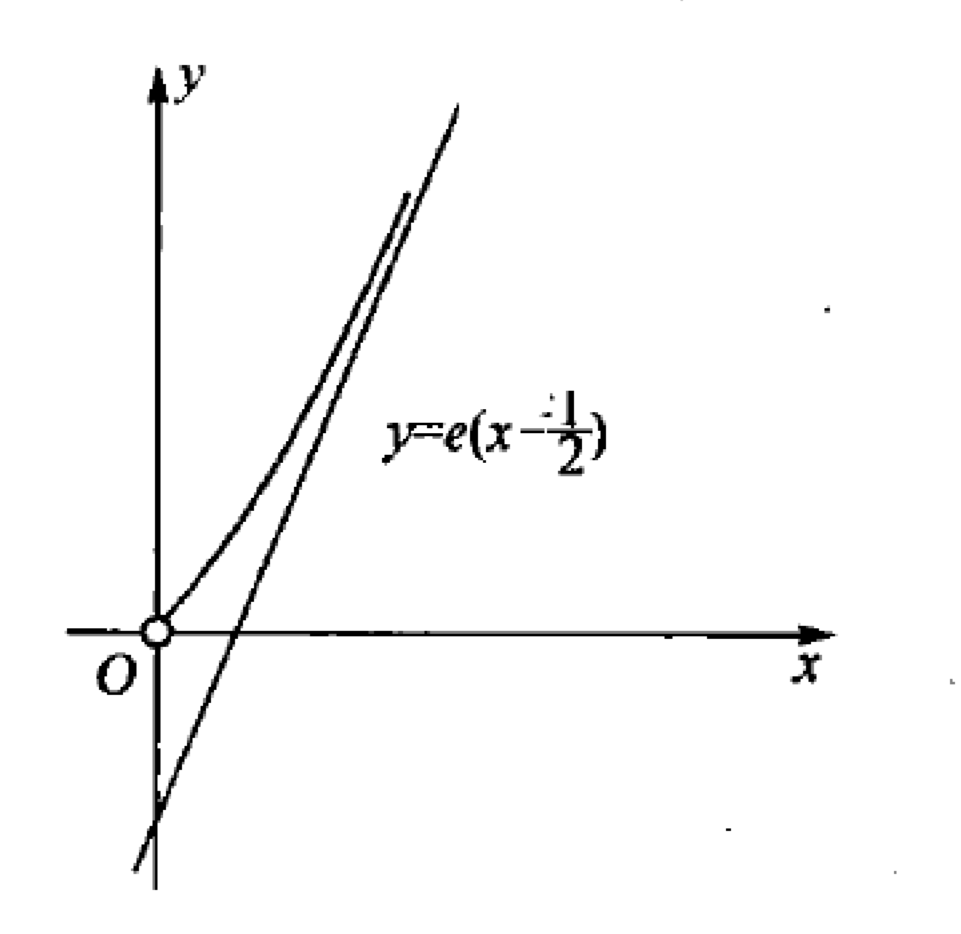
$\lim_{x\to1-0}y=+\infty$，$\lim_{x\to-1+0}y=+\infty$，

所以 $y=\pm1$ 为图形的垂直渐近线，而

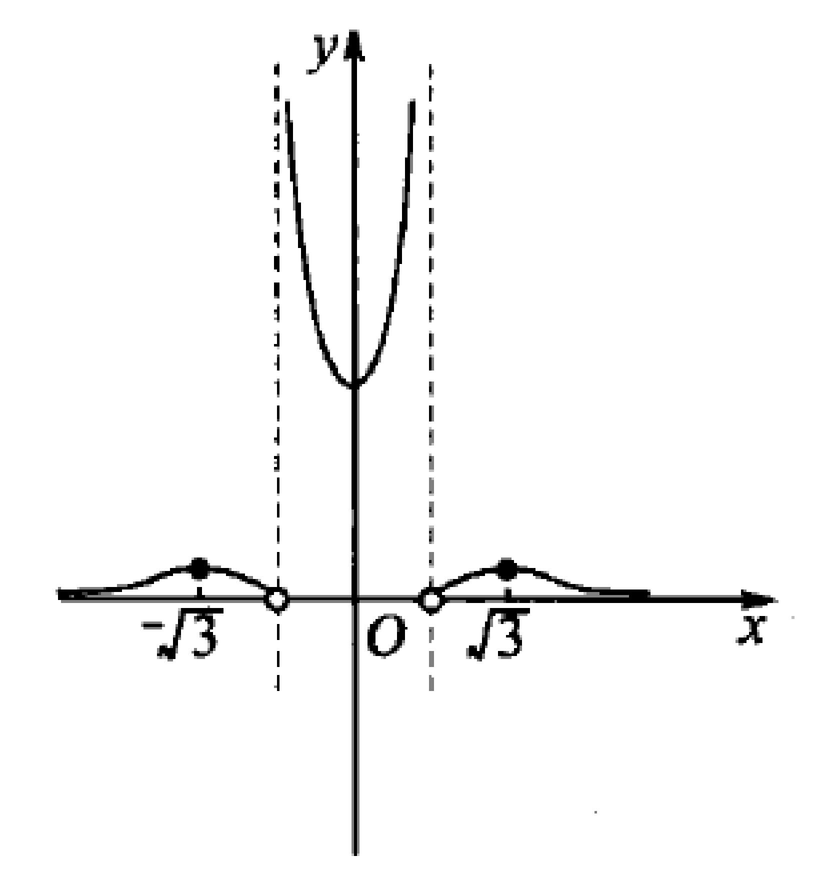
$$\lim_{x\to1+0}y=0,\ \lim_{x\to-1-0}y=0,$$

又　$\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}=0,$

所以，$y=0$ 为曲线的水平渐近线.



1529 题图



1530 题图

$$y'=\frac{2x^3e^{\frac{1}{1-x^2}}(3-x^2)}{(1-x^2)^2(1+x^2)^2}.$$

令 $y'=0$，得 $x=0$ 及 $x=\pm\sqrt{3}$，

容易验证：

当 $x=0$ 时，有极小值 $y=0$.

当 $x=-\sqrt{3}$ 时，有极大值 $y=\frac{1}{4\sqrt{e}}\approx 0.15$.

当 $x=\sqrt{3}$ 时，有极大值 $y=\frac{1}{4\sqrt{e}}\approx 0.15$.

如 1530 题图所示.

作出下列用参数形式表示的曲线(1531 ～ 1540).

【1531】 $x=\frac{(t+1)^2}{4}, y=\frac{(t-1)^2}{4}$.

解 将参数方程，化为直角坐标系下的方程

$$\sqrt{x}=\frac{|t+1|}{2},\sqrt{y}=\frac{|t-1|}{2}.$$

当 $t\geqslant 1$ 时 $\sqrt{x}=\frac{t+1}{2},\sqrt{y}=\frac{t-1}{2}$，

从而 $\sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \quad (x\geqslant 1, x>y).$ ①

当 $t\leqslant -1$ 时，

$$\sqrt{x}=-\frac{t+1}{2},\sqrt{y}=-\frac{t-1}{2},$$

从而 $\sqrt{y}-\sqrt{x}=1,(y\geqslant 1,y>x).$ ②

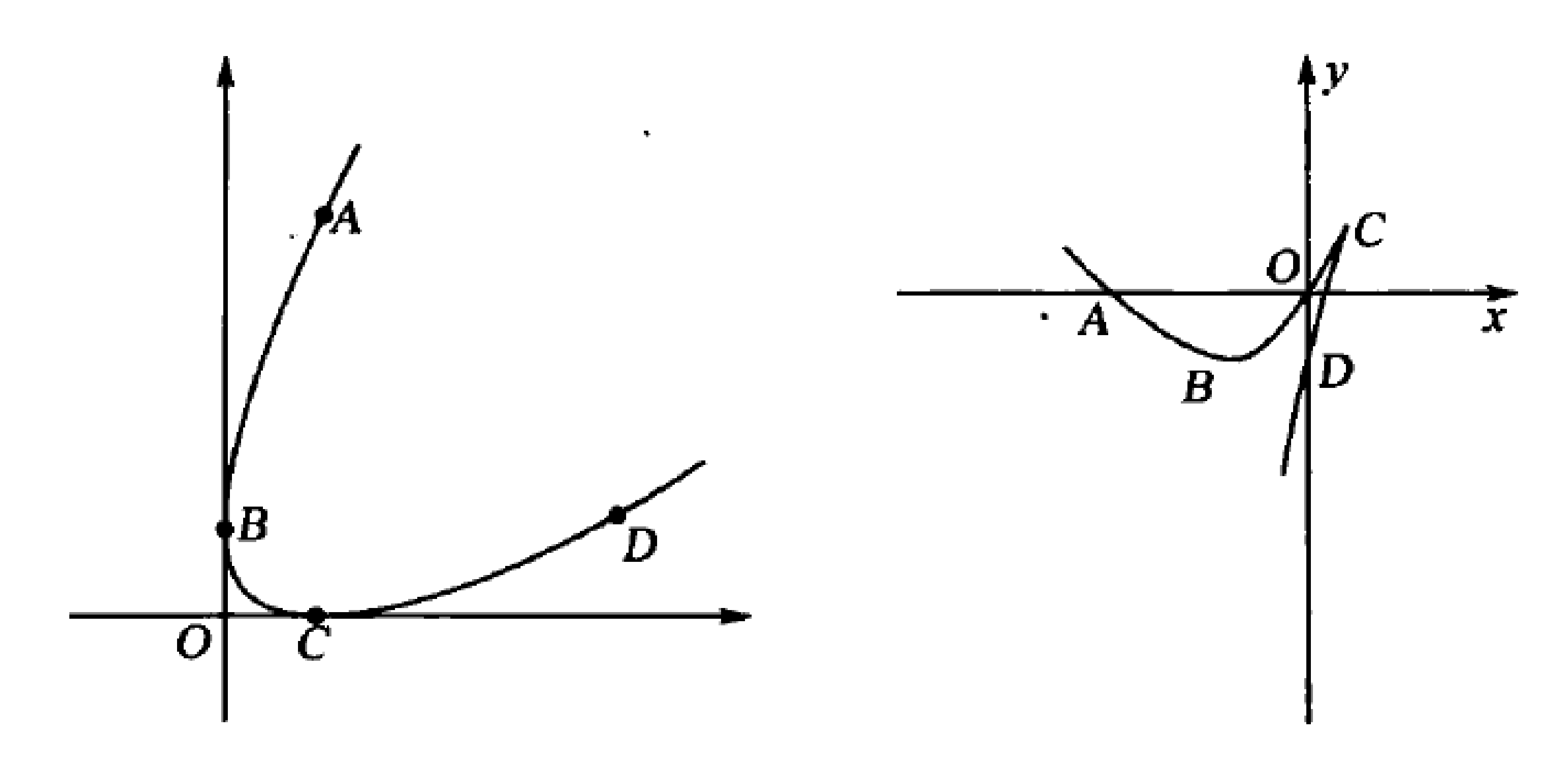
当 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 时,

$$\sqrt{x}=\frac{t+1}{2},\sqrt{y}=\frac{1-t}{2},$$

从而 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \quad (0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1).$ ③

由方程 ①,②,③ 即得所给曲线的图形. 图形关于直线 $y=x$ 对称,如 1531 题图所示.

图中各点为 $A(1,4)$,$B(0,1)$,$C(1,0)$,$D(4,1)$.



1531 题图 1532 题图

【1532】 $x=2t-t^2,y=3t-t^3.$

解 $x'_t=2(1-t),y'_t=3(1-t^2).$

令 $x'_t=0$,得 $t=1$,令 $y'_t=0$,得 $t=\pm 1.$

作下表

t	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,-1)$	+	−	由 $-\infty$ 增加到 -3	由 $+\infty$ 减少到 -2
$(-1,1)$	+	+	由 -3 增加到 1	由 -2 增加到 2
$(1,+\infty)$	−	−	由 1 减少到 $-\infty$	由 2 减少到 $-\infty$

函数的存在域:$x\leqslant 1$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(1-t^2)}{2(1-t)}=\frac{3}{2}(1+t)\qquad(t\neq 1).$$

令$\frac{dy}{dx}=0$,得$t=-1$,此时$x=-3$,$y=-2$,图形有极大值点.

又$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1-t)}$,

故当$t>1$时,图形为凸的.

当$t<1$时,图形为凹.

当$t=0$时,$x=0$,$y=0$.

当$t=2$时,$x=0$,$y=-2$.

当$t=\sqrt{3}$时,$y=0$,$x=0.464$.

$t=-\sqrt{3}$时,$y=0$,$x\approx-6.464$.

如 1532 题图所示. 图中各点分别为 $A(-6.464,0)$, $B(-3,-2)$,$C(1,2)$,$D(0,-2)$.

【1533】 $x=\frac{t^2}{t-1}$,$y=\frac{t}{t^2-1}$.

解 $x'_t=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$,$y'_t=-\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}$.

令$x'_t=0$,得$t=0$及$t=2$,

当$t=\pm1$时,x'_t或y'_t不存在.

作下表

t	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,-1)$	+	−	由$-\infty$增加到$-\frac{1}{2}$	由 0 减少到$-\infty$
$(-1,0)$	+	−	由$-\frac{1}{2}$增加到 0	由$+\infty$减少到 0
$(0,1)$	−	−	由 0 减少到$-\infty$	由 0 减少到$-\infty$
$(1,2)$	−	−	由$+\infty$减少到 4	由$+\infty$减少到$\frac{2}{3}$
$(2,+\infty)$	+	−	由 4 增加到$+\infty$	由$\frac{2}{3}$减少到 0

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+t^2}{t(t-2)(t+1)^2}.$$

当$t>2$或$t<0$时$\frac{dy}{dx}<0$,因而曲线下降

当 $0<t<2$ 时，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$，曲线上升.

令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，得 $t=-1,0,2$，当 $t=0$ 及 $t=2$ 时，曲线有垂直切线 $x=0$ 及 $x=4$.

当 $t=-1$ 时 $x=-\frac{1}{2}$，此为垂直渐近线，

事实上 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}y=\lim\limits_{t\to-1}\frac{t}{t^2-1}=\infty$，

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{t\to1}\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{2}$，

及 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(y-\frac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{t\to1}\frac{-t(t+2)}{2(t+1)}=-\frac{3}{4}$，

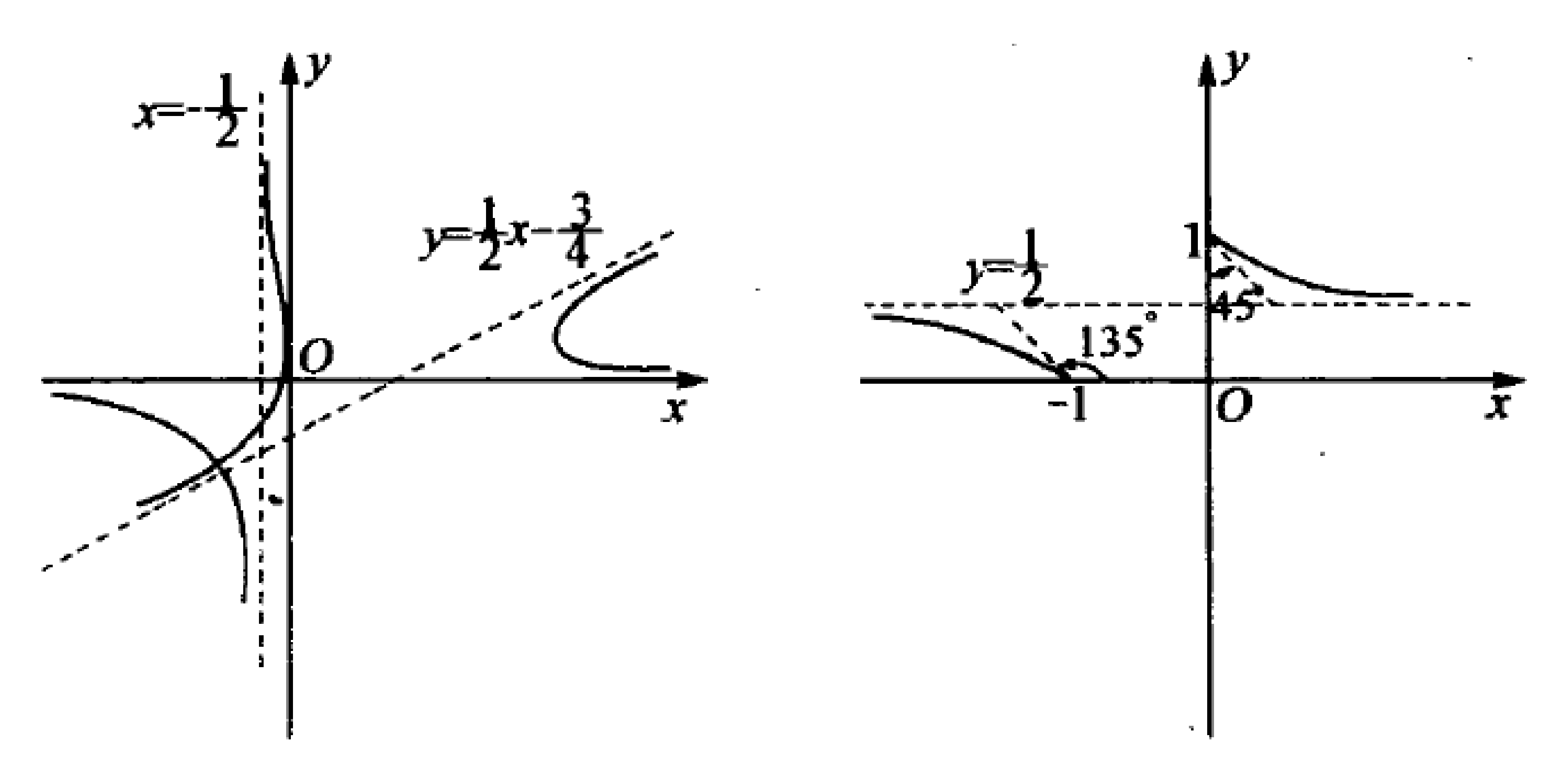
故 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ 为曲线的斜渐近线.

又当 $t\to+\infty$（此时 $x\to+\infty$）时，$y\to0$.

当 $t\to-\infty$（此时 $x\to-\infty$）时，$y\to0$.

所以 $y=0$，也为曲线的渐近线.

如 1533 题图所示.



1533 题图　　1534 题图

【1534】 $x=\frac{t^2}{1-t^2}$，$y=\frac{1}{1+t^2}$.

解　因为以 $-t$ 换 t 时 x 及 y 值不变，故只须考虑 $t\geqslant0$. 又

$$t^2=\frac{x}{1+x},$$

故 $x\geqslant 0$ 或 $x\leqslant -1$,

$$x'_t=\frac{2t}{(1-t^2)^2},y'_t=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}.$$

令 $x'_t=0,y'_t=0$,

得 $t=0$,而当 $t\to 1$ 时,$x'_t\to\infty$,

作下表

t	x'_t	y'_t	x	y
$(0,1)$	+	−	由 0 增加到 $+\infty$	由 1 减少到 $\frac{1}{2}$
$(1,+\infty)$	+	−	由 $-\infty$ 增加到 -1	由 $\frac{1}{2}$ 减少到 0

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2<0,$$

曲线下降

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{4(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}.$$

当 $|t|<1$ 时,$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}>0$,曲线是凹的. 当 $|t|>0$ 时,$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$,曲线是凸的.

当 $t\to\pm 1$ 时,$x\to\infty,y\to\frac{1}{2}$,

所以 $y=\frac{1}{2}$ 为曲线的渐近线.

在点$(-1,0)$ 处$(t=+\infty)$,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-1$.

在点$(0,1)$ 处$(t=0)$,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-1$.

所以在这两点的切线与 Ox 轴成$\frac{3\pi}{4}$的角,且这两点为边界极值点.

如 1534 题图所示.

【1535】 $x = t + e^{-t}, y = 2t + e^{-2t}$.

解 $x'_t = 1 - e^{-t}$,

$$y'_t = 2(1 - e^{-2t}),$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(1 + e^{-t}) = \frac{2(e^t + 1)}{e^t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{e^t - 1}.$$

当 $t = 0, x'_t = 0, y'_t = 0$,

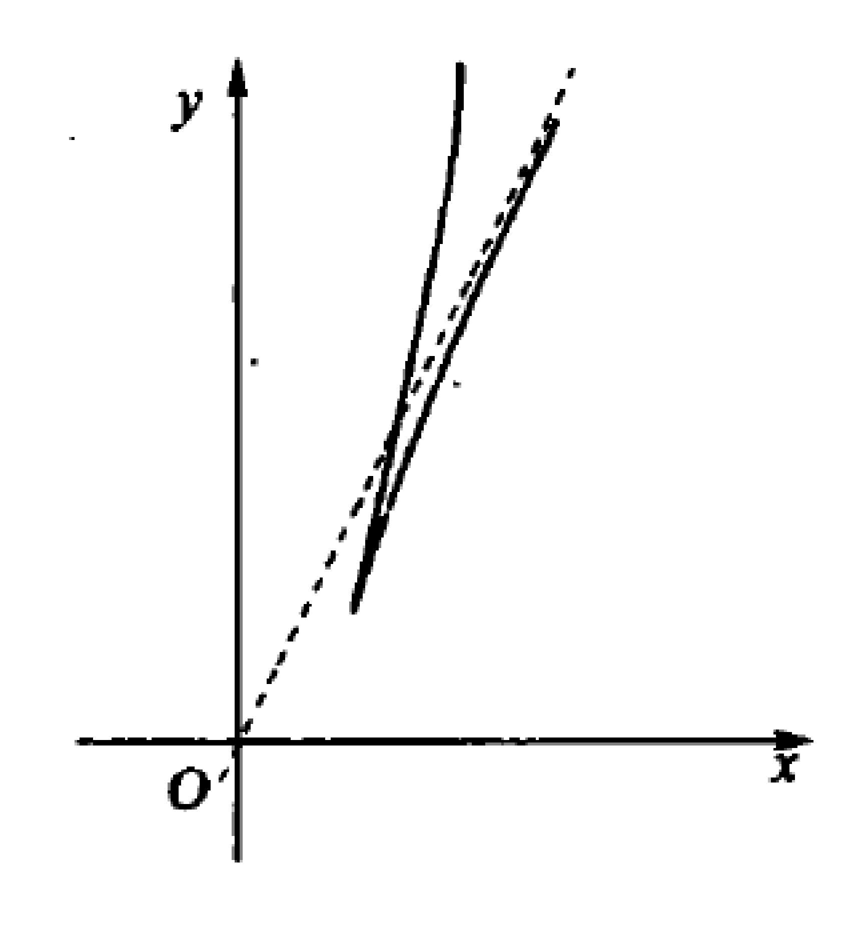
作下表

t	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图形
$(-\infty, 0)$	−	−	由 $+\infty$ 减少到 1	由 $+\infty$ 减少到 1	+	+	↗ ∪
$(0, +\infty)$	+	+	由 1 增加到 $+\infty$	由 1 增加到 $+\infty$	+	−	↗ ∩

又 $$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2t + e^{-2t}}{t + e^{-t}} = 2,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (y - 2x) = \lim_{t\to+\infty} [2t + e^{-2t} - 2(t + e^{-t})] = 0,$$

所以 $y = 2x$ 为曲线的渐近线. 当 $t = 0$ 时, $x = 1, y = 1$, 当 $t = -\ln 2$ 时, 曲线与渐近线相交. 如 1535 题图所示.



1535 题图

【1536】 $x = a\cos 2t, y = a\cos 3t \quad (a > 0)$.

解 显然

$$a\cos 2(t + 2\pi) = a\cos 2t,$$

$$a\cos 3(t + 2\pi) = a\cos 3t,$$

所以，我们只要考虑 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 时 x, y 的变化

$$x'_t = -2a\sin 2t,$$

$$y'_t = -3a\sin 3t.$$

令 $x'_t = 0, y'_t = 0$ 得

$$t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi.$$

作下表

t	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	$-$	$-$	由 a 减少到 $-\frac{a}{2}$	由 a 减少到 $-a$	$+$	上升
$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$	$-$	$+$	由 $-\frac{a}{2}$ 减少到 $-a$	由 $-a$ 增到 0	$-$	下降
$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$	$+$	$+$	由 $-a$ 增加到 $-\frac{a}{2}$	由 0 增加到 a	$+$	上升
$\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$	$+$	$-$	由 $-\frac{a}{2}$ 增加到 a	由 a 减少到 $-a$	$-$	下降
$\left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$	$-$	$+$	由 a 减少到 $-\frac{a}{2}$	由 $-a$ 增加到 a	$-$	下降
$\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$-$	$-$	由 $-\frac{a}{2}$ 减少到 $-a$	由 a 减少到 a	$+$	上升
$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$	$+$	$-$	由 $-a$ 增加到 $-\frac{a}{2}$	由 0 减到 $-a$	$-$	下降
$\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$	$+$	$+$	由 $-\frac{a}{2}$ 增加到 a	由 $-a$ 增加 a	$+$	上升

当 $t = \frac{\pi}{3}$ 时，$\frac{dy}{dx} = 0, x = -\frac{a}{2}, y = -a$.

当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx} = \infty, x = -a, y = 0$.

当 $t = \frac{2\pi}{3}$ 时，$\frac{dy}{dx} = 0, x = -\frac{a}{2}, y = a$.

当 $t=\pi$ 时，$\frac{dy}{dx}=-\frac{9}{4}$（利用洛必达法则）

$x=a,y=-a.$

当 $t=\frac{4\pi}{3}$ 时，$\frac{dy}{dx}=0,x=-\frac{a}{2},y=a.$

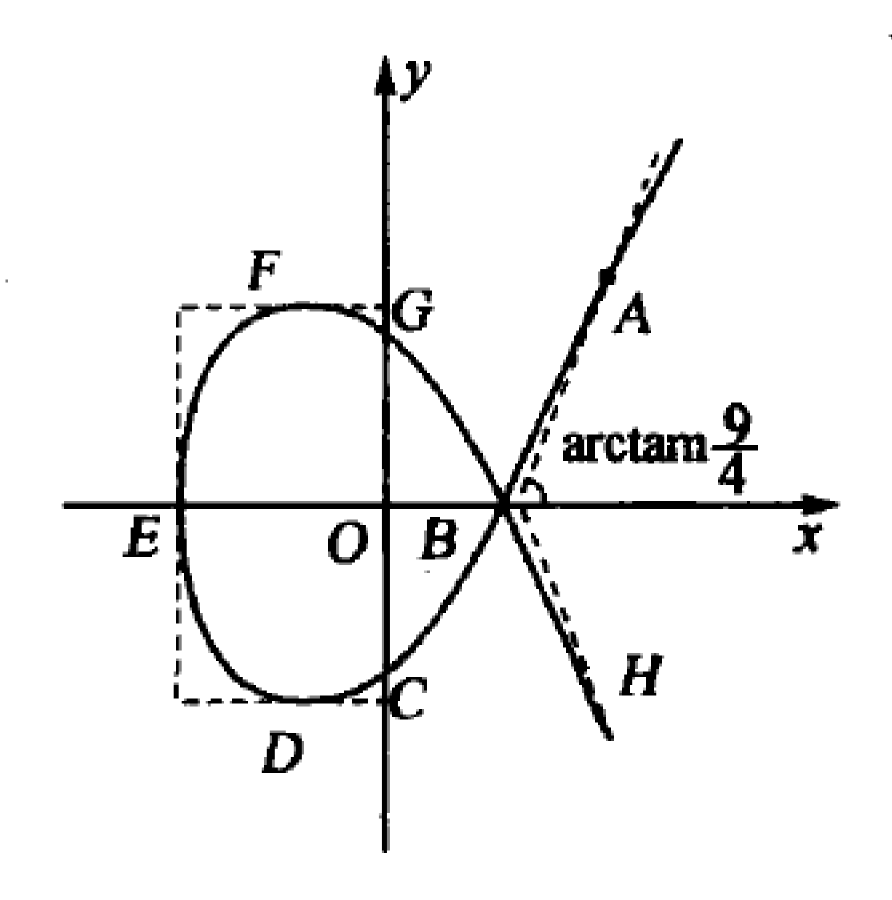
当 $t=\frac{3\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=\infty,x=-a,y=0.$

当 $t=\frac{5\pi}{3}$ 时，$\frac{dy}{dx}=\infty,x=-\frac{a}{2},y=-a.$

当 $t=0$ 时，$\frac{dy}{dx}=\frac{9}{4}$（利用洛必达法则）

$x=y=a.$

如 1536 题图所示，图中各点为 $A(a,a),B\left(\frac{a}{2},0\right),C\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),D\left(-\frac{a}{2},-a\right),E(-a,0),F\left(-\frac{a}{2},a\right),G\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),H(a,-a)$.



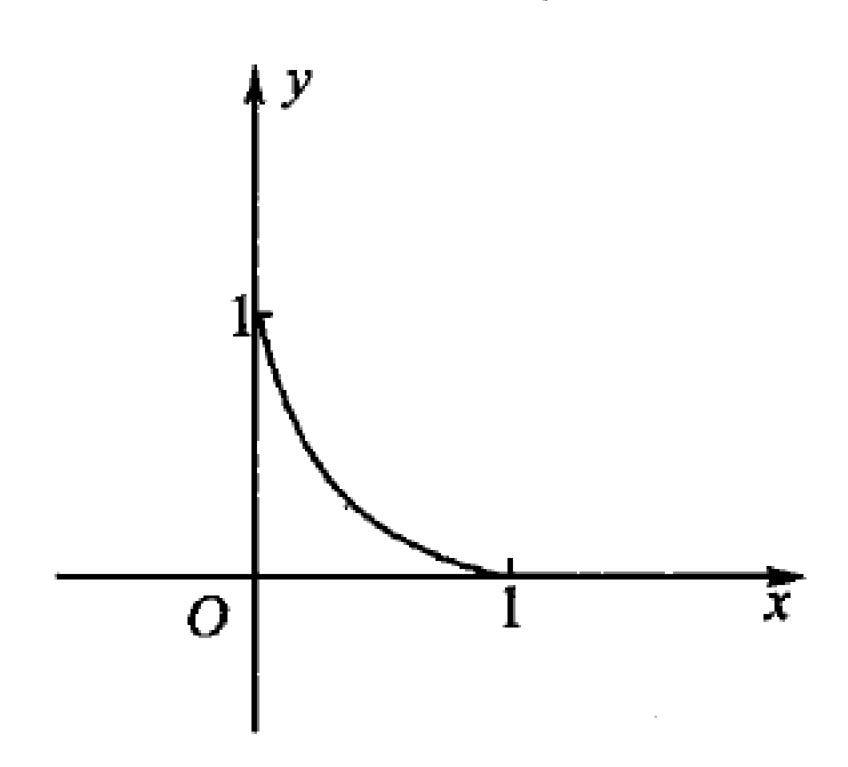
1536 题图

【1537】 $x=\cos^4 t,y=\sin^4 t.$

解 $\sqrt{x}=\cos^2 t,\sqrt{y}=\sin^2 t,$

所以 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1.$

如 1537 题图.



1537 题图

【1538】 $x=t\ln t, y=\dfrac{\ln t}{t}$.

解 当 $t>0$ 时,x,y 才有意义

$$x'_t=1+\ln t,$$

$$y'_t=\frac{1-\ln t}{t^2}.$$

令 $x'_t=0, y'_t=0$ 得 $x=\dfrac{1}{e}$ 及 $x=e$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2\ln^2 t-4}{t^3(1+\ln t)^2},$$

当 $t=e$ 时,图形有极大值点:$A\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$.

令$\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$,得 $t=e^{\sqrt{2}}$ 及 $t=e^{-\sqrt{2}}$.

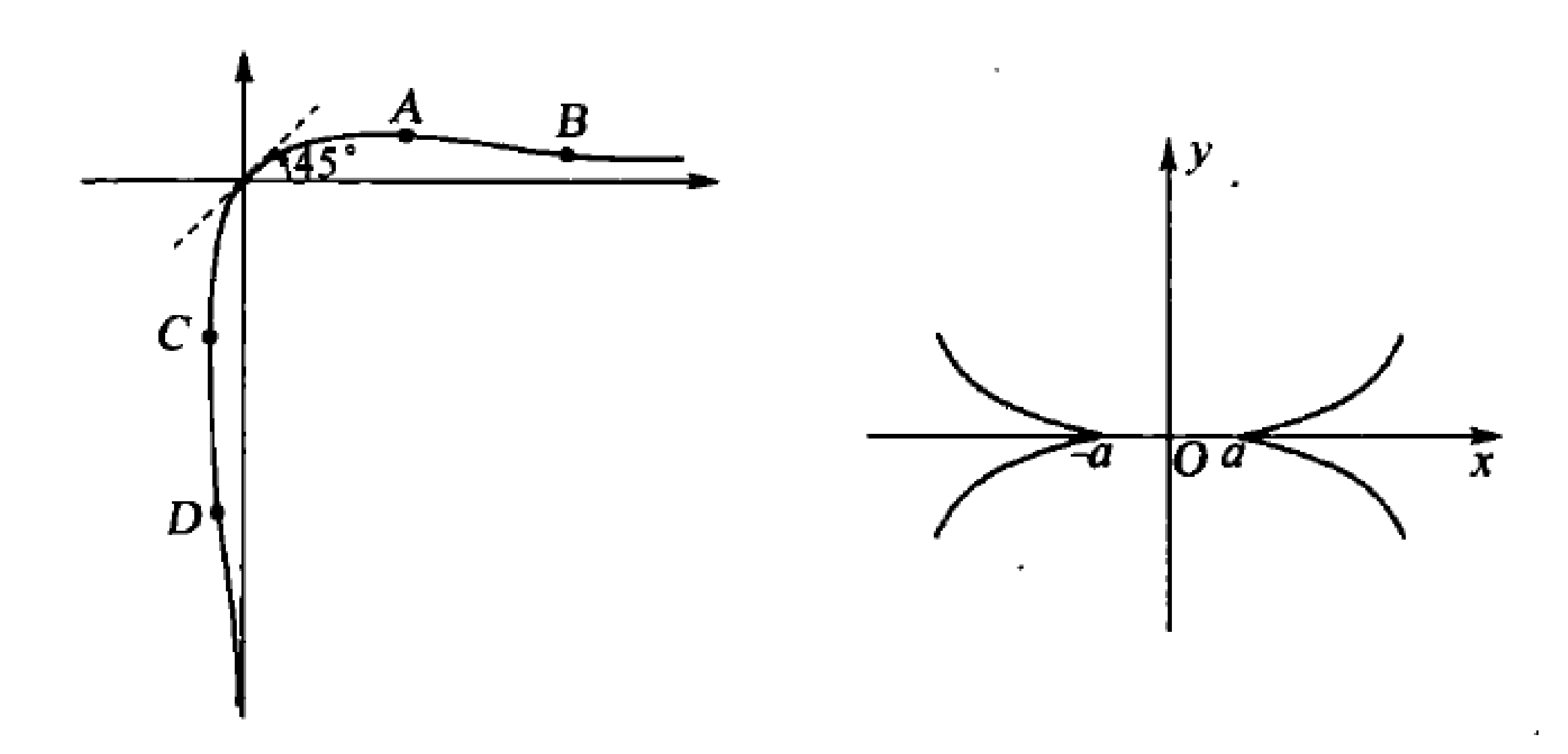
图形有拐点 $B\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$及 $C\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}},-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right)$. 当 $e^{-\sqrt{2}}<t<e^{\sqrt{2}}$ 时,曲线是凸的. 当 $0<t<e^{-\sqrt{2}}$ 及 $e^{\sqrt{2}}<t<+\infty$ 时,曲线是凹的. 当 $0<t<\dfrac{1}{e}$ 及 $e<t<+\infty$ 时,$\dfrac{dy}{dx}>0$,曲线下降. 当$\dfrac{1}{e}<t<e$ 时,曲线上升.

当 $t=1$ 时，$x=0, y=0$，即曲线过点 $(0,0)$，且 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,0)}=1$.

当 $t\to+\infty$ 时，$x\to+\infty, y\to 0$，所以 $y=0$ 为曲线的水平渐近线.

当 $t\to+0$ 时，$x\to-0, y\to-\infty$，故 $x=0$ 为曲线的垂直渐近线.

如 1538 题图所示. 图中各点为 $A\left(\mathrm{e},\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$，$B\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}},\dfrac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}\right)$，$C\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}},-\mathrm{e}\right)$，$D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}},-2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right)$.



1538 题图　　1539 题图

【1539】 $x=\dfrac{a}{\cos^3 t}, y=a\tan^3 t \qquad (a>0)$.

解　将参数方程化为直角坐标系下的方程 $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. 显然，$|x|\geqslant a$，且图形关于两坐标轴对称，故只须讨论 $x>a, y>0$ 的情形.

由于
$$y'=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}},$$
$$y''=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(y^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}\right),$$

注意到，当 $x>0, y>0$ 时，有 $x>y$，从而有 $y'>0, y''>0$，故图形上升且呈凹状. 而 $y'_{\substack{x=a\\y=0}}=0$，故在 $(a,0)$ 点的切线为 $y=0$，如 1539 题图所示.

【1540】 $x=a(\operatorname{sh}t-t), y=a(\operatorname{ch}t-1) \qquad (a>0).$

解　当用 $-t$ 代替 t 时，x 的绝对值不变，但符号相反，而 y 却不变. 故图形关于 Oy 轴对称.

$$x'_t=a(\operatorname{ch}t-1),\ y'_t=a\operatorname{sh}t,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^t+1}{e^t-1},\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4e^{2t}}{a(e^t-1)^4}<0,$$

故曲线是凸的.

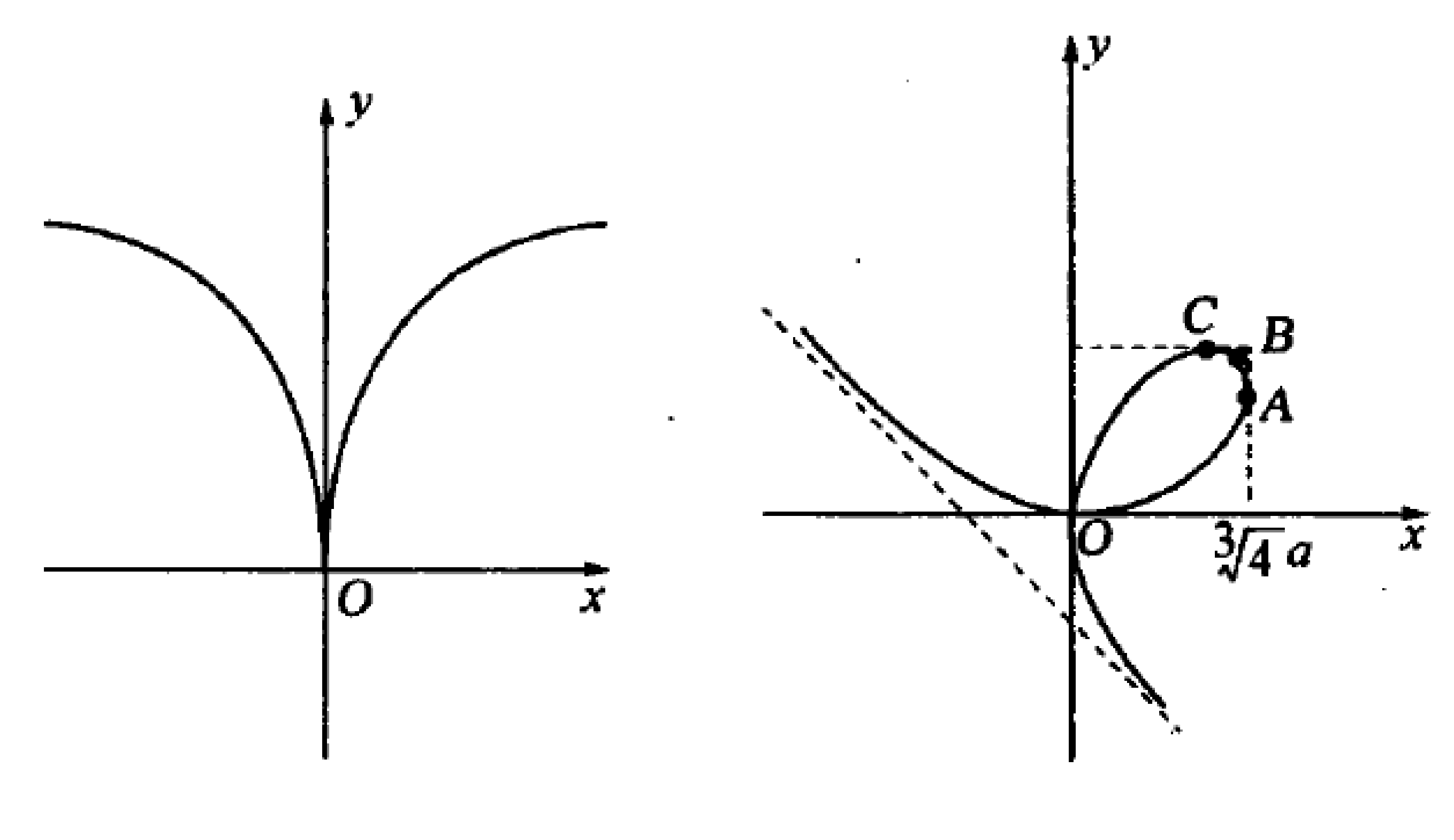
作下表

t	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(-\infty,0)$	+	−	由 $-\infty$ 增加到 0	由 $+\infty$ 减少到 0	−	↘
$(0,+)$	+	+	由 0 增加到 $+\infty$	由 0 增加到 $+\infty$	+	↗

当 $t\to-0$ 时，$\frac{dy}{dx}\to-\infty$.

当 $t\to+0$ 时，$\frac{dy}{dx}\to+\infty$，而当 $t=0$ 时 $x=y=0$. 故在 $(0,0)$ 的切线为 $x=0$.

如 1540 题图所示.



1540 题图　　　　1541 题图

将下列曲线方程表示成参数形式，再作出这些曲线，若(1541 ～ 1544).

【1541】 $x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0)$.

提示：假设 $y = tx$.

解 设 $y = tx$，代入原方程，得

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3},$$

$$x'_t = \frac{6a\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}{(1+t^3)^2},$$

$$y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

令 $x'_t = 0$ 及 $y'_t = 0$ 得 $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0, \sqrt[3]{2}$，而当 $t \to -1$ 时，$x'_t \to \infty, y'_t \to \infty$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3},$$

作下表

t	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	−	由 0 增加到 $+\infty$	由 0 减少到 $-\infty$
$(-1, 0)$	+	−	由 $-\infty$ 增加 0	由 $+\infty$ 减少到 0
$\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	+	+	由 0 增加到 $\sqrt[3]{4a}$	由 0 增加到 $\sqrt[3]{2a}$
$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}\right)$	−	+	由 $\sqrt[3]{4}a$ 减少到 $\sqrt[3]{2}a$	由 $\sqrt[3]{2}a$ 增加到 $\sqrt[3]{4}a$
$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$	−	−	由 $\sqrt[3]{2}a$ 减少到 0	由 $\sqrt[3]{4}a$ 减少到 0

当 $t \to -1$ 时，$x \to \infty, y \to \infty$，且

$$\lim_{t \to -1} \frac{y}{x} = \lim_{t \to -1} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1,$$

$$\lim_{t\to-1}(y+x)=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2+3at}{1+t^3}$$

$$=\lim_{t\to-1}\frac{6at+3a}{3t^2}=-a,$$

故 $x+y=a$ 为曲线的渐近线.

当 $t=0,x=0,y=0,\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=0$,

当 $t\to+\infty$ 时,$x\to0,y\to0,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}\to\infty$.

这说明,坐标原点为曲线的二重点,在这一点,曲线的一支与 Ox 轴相切,另一支与 Oy 轴相切. 如 1541 题图所示.

【1542】 $x^2+y^2=x^4+y^4$.

解 显然,曲线对 Ox 轴,Oy 轴及直线 $y=\pm x$ 对称,设 $x=ty$,则当 $y\neq0$ 时,

$$y=\pm\sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}},$$

根据对称性,不妨只考察方程

$$\begin{cases}x=t\sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^4+1}}\\ y=\sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^4+1}}\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant1),$$

即只考虑介于正半纵轴及直线 $y=x$ 之间的曲线($0\leqslant x\leqslant1,x\leqslant y$),然后根据对称性作出全部曲线,当 t 由 0 连续地变到 1 时曲线上的点由(0,1) 连续地变到(1,1)

$$x'_t=\sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}}+\sqrt{\frac{t^4+1}{t^2+1}}\cdot\frac{t^2(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2},$$

$$y'_t=\sqrt{\frac{t^4+1}{t^2+1}}\cdot\frac{t(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$,得 $t=0,\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

当 $t=0$ 时，$x=0$，$y=1$（极小值）.

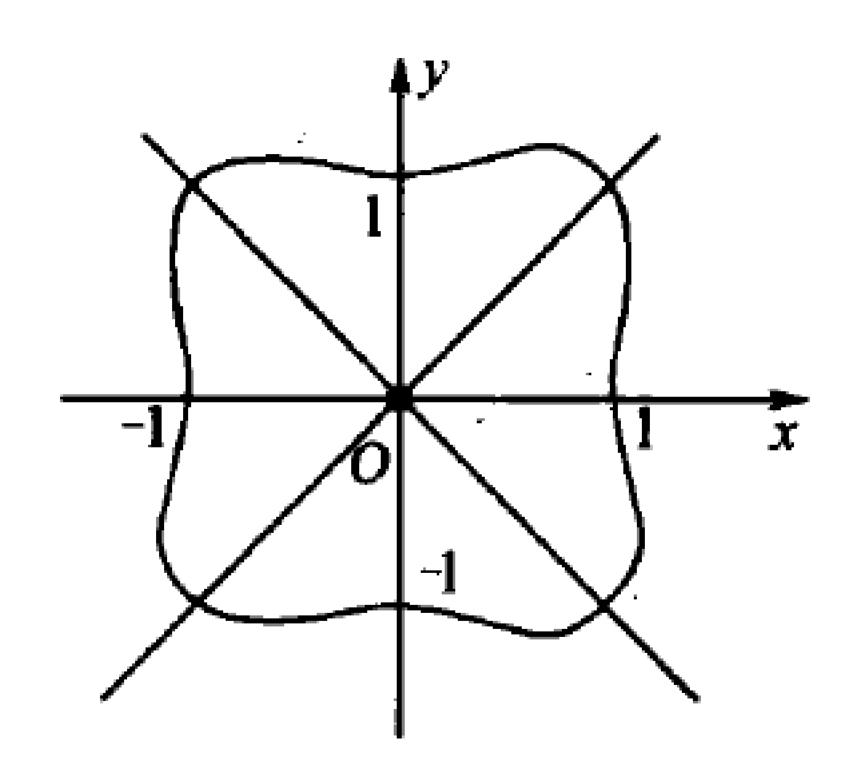
当 $t=\sqrt{\sqrt{2}-1}$ 时，

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.71,$$

$$y=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\approx 1.1 \qquad \text{（极大值）}.$$

作图并利用对称性可得.

曲线的图形如 1542 题图所示，(0,0) 是孤立点.



1542 题图

1543 题图

【1543】 $x^2y^2=x^3-y^3$.

解　设 $y=tx$，代入得

$$x=\frac{1-t^3}{t^2},$$

$$y=\frac{1-t^3}{t}(t\neq 0),$$

$$x'_t=-\frac{2+t^3}{t^3},$$

$$y'_t=-\frac{1+2t^3}{t^2},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t(1+2t^3)}{2+t^3}.$$

当 $t=-\sqrt[3]{2}$ 时，$x'_t=0$.

当 $t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 时，$y'_t=0$，

$$\lim_{t\to 0}x'_t=0,\lim_{t\to 0}y'_t=0.$$

作下表

t	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,-\sqrt[3]{2})$	$-$	$+$	由 $+\infty$ 减少到 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	由 $-\infty$ 增加到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$
$\left(\sqrt[3]{2},-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$+$	$+$	由 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 增加到 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 增加到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$
$\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right)$	$+$	$-$	由 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 增加到 $+\infty$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 减少到 $-\infty$
$(0,+\infty)$	$-$	$-$	由 $+\infty$ 减少到 $-\infty$	由 $+\infty$ 减少到 $-\infty$

当 $t=1$ 时，$x=y=0$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=1$.

当 $t=-\sqrt[3]{2}$ 时，$x=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$，$y=-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=-\sqrt[3]{2}}=\infty$.

当 $t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 时，$x=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$，$y=-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=0$.

如 1543 题图所示. 图中各点为 $A\left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}},-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)$，$B\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}},-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$.

【1544】 $x^y=y^x$ $\quad(x>0,y>0)$.

解 显然直线 $y=x(x>0)$ 是图形的一部分. 对于 $y\neq x$ 的部分，图形关于直线 $y=x$ 对称. 设 $y=(1+t)x$ 代入解得 $x=(1+t)^{\frac{1}{t}}$，$y=(1+t)^{1+\frac{1}{t}}$，

由条件 $x>0,y>0$ 知，$-1<t<+\infty$，

而 $$\lim_{t\to-1+0}x=\lim_{t\to-1+0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=+\infty,$$

$$\lim_{t\to-1+0}y=\lim_{t\to-1+0}(1+t)^{1+\frac{1}{t}}=1,$$

及 $$\lim_{t\to 1+0}y=\lim_{t\to+\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}}=1,$$

$$\lim_{t\to+\infty} y = \lim_{t\to+\infty}(1+t)^{1+\frac{1}{t}} = +\infty,$$

故直线 $x=1$ 和 $y=1$ 是曲线的渐近线.

又　$$\lim_{t\to 0} x = \lim_{t\to 0} y = \mathrm{e},$$

故点(e,e)是曲线上的二重点(即在 $y\neq x$ 的部分上又在 $y=x$ 那部分上). 由于

$$x'_t = (1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot \frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)},$$

$$y'_t = (1+t)^{1+\frac{1}{t}} \cdot \frac{t-\ln(1+t)}{t^2},$$

所以　$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1+t)\left[1+\frac{t^2}{t-(1+t)\ln(1+t)}\right] \qquad (t\neq 0).$$

设　$g(t) = t^2 - [(1+t)\ln(1+t) - t]$.

则　$$g'(t) = 2t - \ln(1+t), g''(t) = 2 - \frac{1}{1+t}.$$

当 $0 \leqslant t < +\infty$ 时, $g''(t) > 0$, 所以 $g'(t)$ 单调增加, 从而

$$g'(t) > g'(0) = 0,$$

因而有　$g(t) = t^2 - [(1+t)\ln(1+t) - t] > g(0) = 0$,

即　$t^2 > (1+t)\ln(1+t) - t$.

又显然　$(1+t)\ln(1+t) - t > 0 \qquad (0 < t < +\infty)$,

所以　$$\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t)-t} > 1 \qquad (0<t<+\infty),$$

于是当 $0 < t < +\infty$ 时,

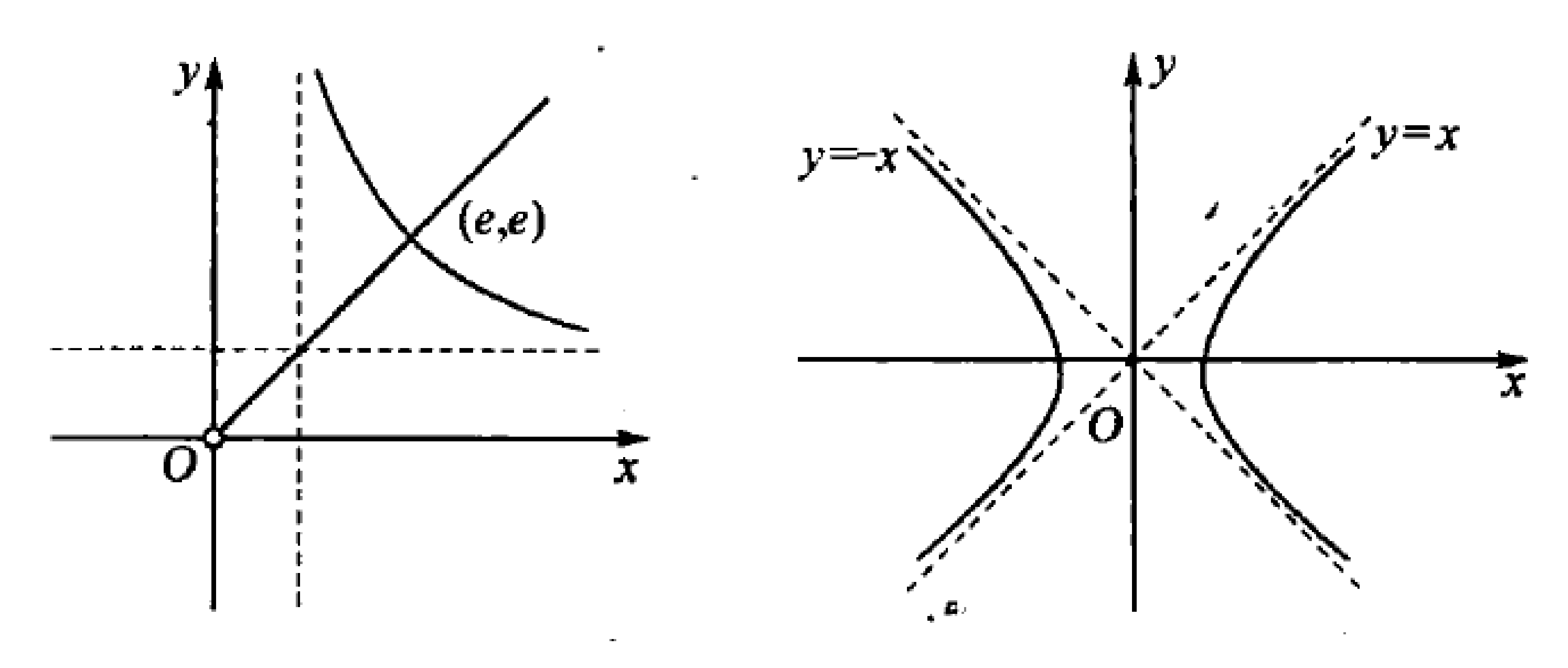
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1+t)\left[1-\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t)-1}\right] < 0,$$

同样讨论可知, 当 $-1 < t < 0$ 时, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} < 0$, 而当 $t=0$ 时

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1,$$

所以, 曲线始终是单调下降的.

如 1544 题图所示



1544 题图　　　　1545 题图

【1545】 作出曲线 $\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{ch}^2 y=1$ 的图形.

解 显然,曲线关于两坐标轴是对称的,故只须考虑在第一象限 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 内的部分.

因为 $\quad \mathrm{ch}^2 x-\mathrm{ch}^2 y=1,$

从而 $\quad y=\ln(\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2 x-1})\qquad (x\geqslant 0),$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}\left(\mathrm{ch}x+\frac{\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{ch}x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2x+1}{\mathrm{sh}^2x-1}}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1})-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}{\mathrm{e}^x},$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}{\mathrm{e}^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{ch}x+\dfrac{\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}}{\mathrm{e}^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{ch}x(\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1})}{\mathrm{e}^x\cdot\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}=1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=0.$

因此，直线 $y=x$ 是曲线的渐近线，函数的定义域为：

$$\mathrm{sh}^2x-1\geqslant 0,$$

即 $$x\geqslant \ln(1+\sqrt{2})\approx 0.88.$$

当 $x=\ln(1+\sqrt{2})$ 时，$y=0$，又

$$y'_x=\frac{1}{\mathrm{sh}x+\sqrt{\mathrm{sh}^2-1}}\left(\mathrm{ch}x+\frac{\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{ch}x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x-1}}>0,$$

$$y''_x=\frac{-2\mathrm{sh}x}{(\mathrm{sh}^2x-1)^{\frac{3}{2}}}<0,$$

因此，曲线单调上升，并呈凸状，利用对称性，可得曲线的图形如1545题图所示.

作出下列用极坐标$(\varphi,r)(r\geqslant 0)$表示的函数的图形(1546～1541).

【1546】 $r=a+b\cos\varphi\qquad(0<a\leqslant b).$

解 当 $a=b$ 时，$r=a(1+\cos\varphi)$ 这是心脏线如1546题图1所示.

当 $0<a<b$ 时，其图形叫蚶线，

由于 $r(-\varphi)=r(\varphi)$，故图形关于极轴对称.

当 $r\geqslant 0$ 时，

$$|\varphi|\leqslant\alpha=\arccos\left(-\frac{a}{b}\right),$$

$$r'_\varphi=-b\sin\varphi<0,\left(0<\varphi<\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)\right).$$

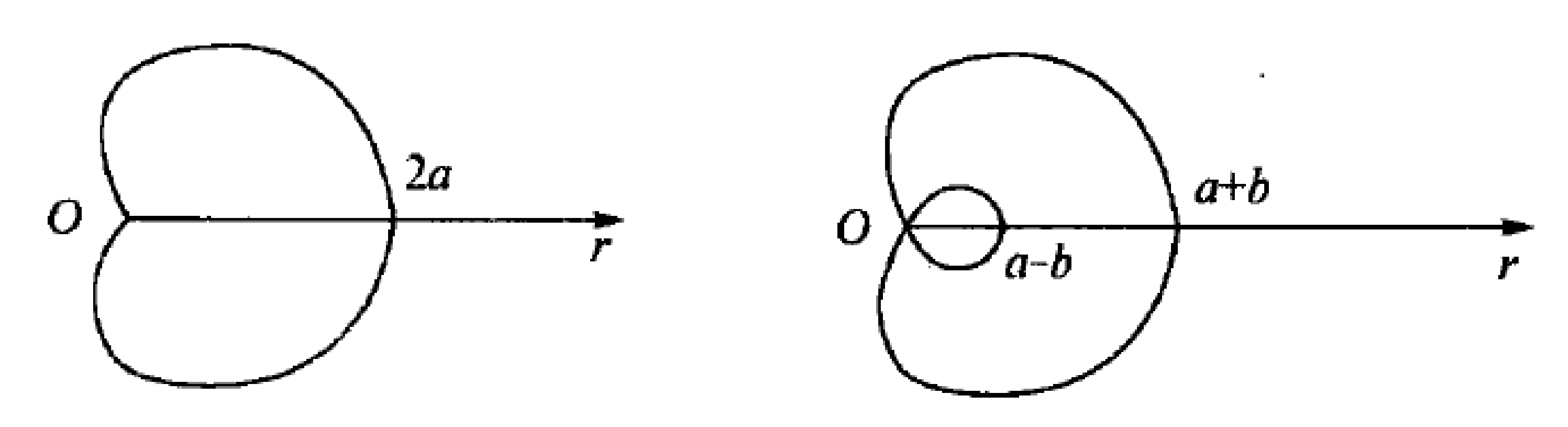
当 $\varphi=0$ 时，r 有极大值 $r=a+b$.

当 $\varphi=\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$ 有边界极小值 $r=0$.

当 φ 由0变到 α 时，r 由 $(a+b)$ 变到0.

当 $r<0$ 时，$\alpha<|\varphi|\leqslant\pi$. 当 φ 由 α 变到 π 时，r 由0减少到 $a-b$.

极点 O 为二重点. 如 1546 题图 2 所示.



1546 题图 1　　　1546 题图 2

【1547】 $r = a\sin 3\varphi \quad (a > 0)$.

解　因为 $r\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = r(\varphi)$,

故函数 $r = a\sin 3\varphi$ 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的周期函数,函数的定义域为:

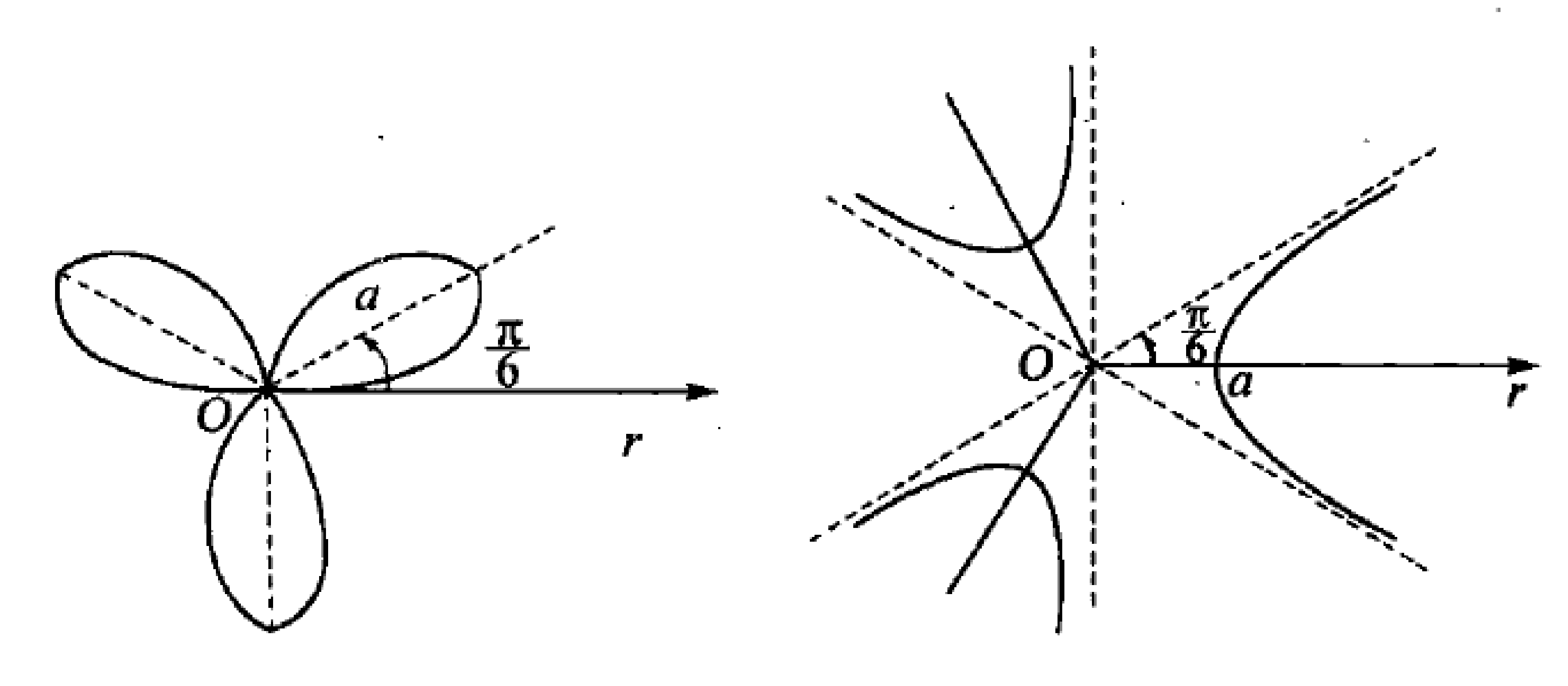
$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \pi, \frac{4\pi}{3} < \varphi < \frac{5\pi}{3}$$

故只要讨论 $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$ 即可.

$r'_{\varphi} = 3a\cos 3\varphi$.

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $r'_{\varphi} > 0$, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 时 $r'_{\varphi} < 0$, 故当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, r 有极大值 $r = a$, 当 $\varphi = 0, \frac{\pi}{3}$ 时, r 有极小值 $r = 0$.

射线 $\varphi = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{5\pi}{6}, \varphi = \frac{3\pi}{2}$ 为曲线的三对称轴. 曲线在 $O(0, 0)$ 有三重点,整个曲线有三个形状相同的叶. 如 1547 题图所示.



1547 题图　　　1548 题图

【1548】 $r=\dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}\quad(a>0)$.

解 由于 $r\left(\varphi+\dfrac{2\pi}{3}\right)=r(\varphi)$.

故 $r=\dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ 是以 $\dfrac{2\pi}{3}$ 为周期的周期函数，又 $r(-\varphi)=r(\varphi)$，故图形关于极轴对称.

函数的定义域为：$|\varphi|<\dfrac{\pi}{6}$，及 $\dfrac{\pi}{2}<|\varphi|<\dfrac{5\pi}{6}$ 为此只要讨论 $-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{6}$ 即可.

$r'_\varphi=\dfrac{3a\sin 3\varphi}{2(\cos 3\varphi)^{\frac{3}{2}}}$.

当 $\varphi\in\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 时，$r'_\varphi<0$；当 $\varphi\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 时，$r'_\varphi>0$.

故当 $\varphi=0$ 时，r 有极小值 $r=a$. 而 $\lim\limits_{\varphi\to\pm\frac{\pi}{6}}r=+\infty$，

故 $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{6}$ 为曲线的渐近线. 如 1548 题图所示.

【1549*】 $r=a\dfrac{\text{th}\varphi}{\varphi-1},\varphi>1\quad(a>0)$.

解 $\lim\limits_{\varphi\to1+0}=\lim\limits_{r\to1+0}a\dfrac{\text{th}\varphi}{\varphi-1}=+\infty$,

$\lim\limits_{\varphi\to+\infty}r=\lim\limits_{\varphi\to+\infty}\dfrac{a\text{th}\varphi}{\varphi-1}=0$,

从而曲线以 $\varphi=1$ 为渐近线，以极点为渐近点.

$$r'_\varphi=a\cdot\frac{\frac{1}{\text{ch}^2\varphi}(\varphi-1)-\text{th}\varphi}{(\varphi-1)^2}=a\frac{\varphi-1-\frac{1}{2}\text{sh}2\varphi}{(\varphi-1)^2\text{ch}^2\varphi}$$

当 $1<\varphi<+\infty$ 时 $\varphi-1-\dfrac{1}{2}\text{sh}2\varphi<0$,

事实上，令 $g(\varphi)=\varphi-1-\dfrac{1}{2}\text{sh}2\varphi$.

则 $\qquad g'(\varphi)=1-\text{ch}2\varphi<0\qquad(1<\varphi<+\infty)$,

所以 $g(\varphi)$ 在$(1,+\infty)$ 内单调减少，故

$$g(\varphi) < g(1) = -\frac{1}{2}\text{sh}2 < 0,$$

因此 $r'_\varphi < 0$，即当 φ 增大时，r 单调减. 考虑曲线上点的直角坐标 (x,y)：$x = a\dfrac{\text{th}\varphi}{\varphi-1}\cos\varphi$，$y = a\dfrac{\text{th}\varphi}{\varphi-1}\sin\varphi$，

当 $\varphi \to t+0$ 时，$x \to +\infty$，$y \to +\infty$，故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{\varphi\to1+0}\tan\varphi = \tan1.$$

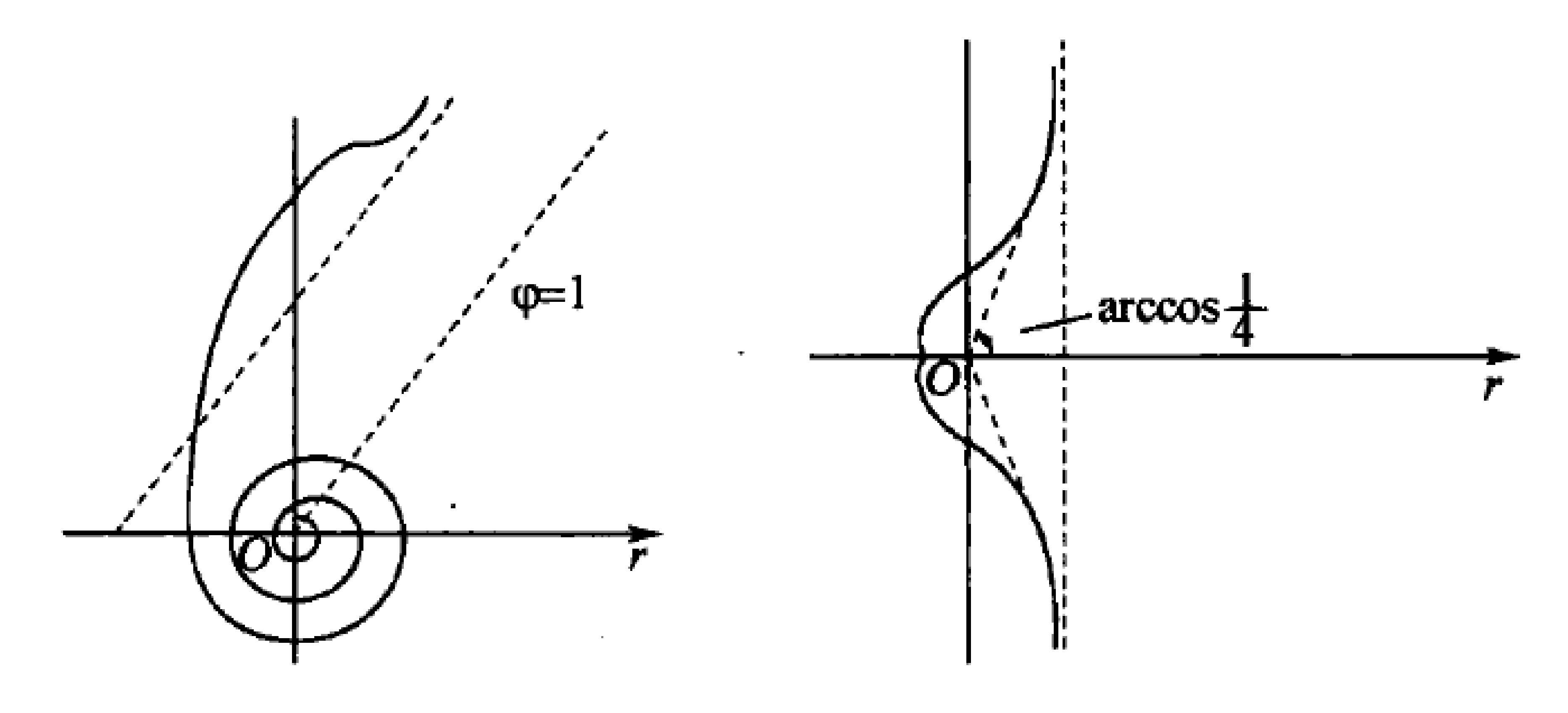
而

$$\lim_{x\to+\infty}(y - x\tan1)$$

$$= \lim_{\varphi\to1+0}\left(a\frac{\text{th}\varphi}{\varphi-1}\sin\varphi - a\frac{\text{th}\varphi}{\varphi-1}\cos\varphi\cdot\tan1\right)$$

$$= \lim_{\varphi\to1+0} a\,\text{th}\varphi\cdot\cos\varphi\frac{\tan\varphi-\tan1}{\varphi-1} = \frac{a\,\text{th}1}{\cos1}.$$

于是在直角坐标系下，当 $r\to+\infty$ 时，曲线 $r = a\dfrac{\text{th}\varphi}{\varphi-1}$ 以直线 $y = x\tan1 + a\dfrac{\text{th}1}{\cos1}$ 为渐近线. 曲线为螺状线. 如 1549 题图所示.



1549 题图　　　　1550 题图

【1550*】 $\varphi = \arccos\dfrac{r-1}{r^2}$.

解　显然，曲线关于极轴对称. 且 $r = r(\varphi)$ 以 2π 为周期，因此，只须在 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 内讨论.

方程可化为 $r = \dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}$.

由于必须 $1-4\cos\varphi\geqslant 0$，故 $\arccos\frac{1}{4}\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

当 $\varphi=\arccos\frac{1}{4}$ 时 $r=2$. 由 $r>0$ 知曲线方程为

$$r=\frac{1+\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}\qquad\left(\arccos\frac{1}{4}\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right),\qquad ①$$

$$r=\frac{1-\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}\qquad\left(\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi\right).\qquad ②$$

对于方程 ① 所表示的曲线

$$r'_{\varphi}=\frac{(\sqrt{1-4\cos\varphi}+1-2\cos\varphi)\sin\varphi}{2\cos^2\varphi\sqrt{1-4\cos\varphi}}>0$$

$$\left(\arccos\frac{1}{4}\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right),$$

且 $$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}+0}r=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{1+\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}=+\infty,$$

所以当 φ 由 $\arccos\frac{1}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，r 由 2 变到 $+\infty$，且当 $r\to+\infty$ 时有渐近线 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

设 (x,y) 为曲线上点的直角坐标，由

$$\cos\varphi=\frac{r-1}{r^2},$$

得 $$x=\frac{r-1}{r},$$

故当 $r\to+\infty$ 时，$x\to 1$，即曲线与直线 $r=\frac{1}{\cos\varphi}(x=1)$ 无限接近，

对于方程(2)

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}+0}r=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{1-\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}=1,$$

故 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 为曲线上的点. 又

$$r'_{\varphi}=\frac{\sin\varphi[\sqrt{1-4\cos\varphi}-(1-2\cos\varphi)]}{2\cos^2\varphi\sqrt{1-4\cos\varphi}}.$$

设 $f(\varphi)=\sqrt{1-4\cos\varphi}-(1-2\cos\varphi)$.

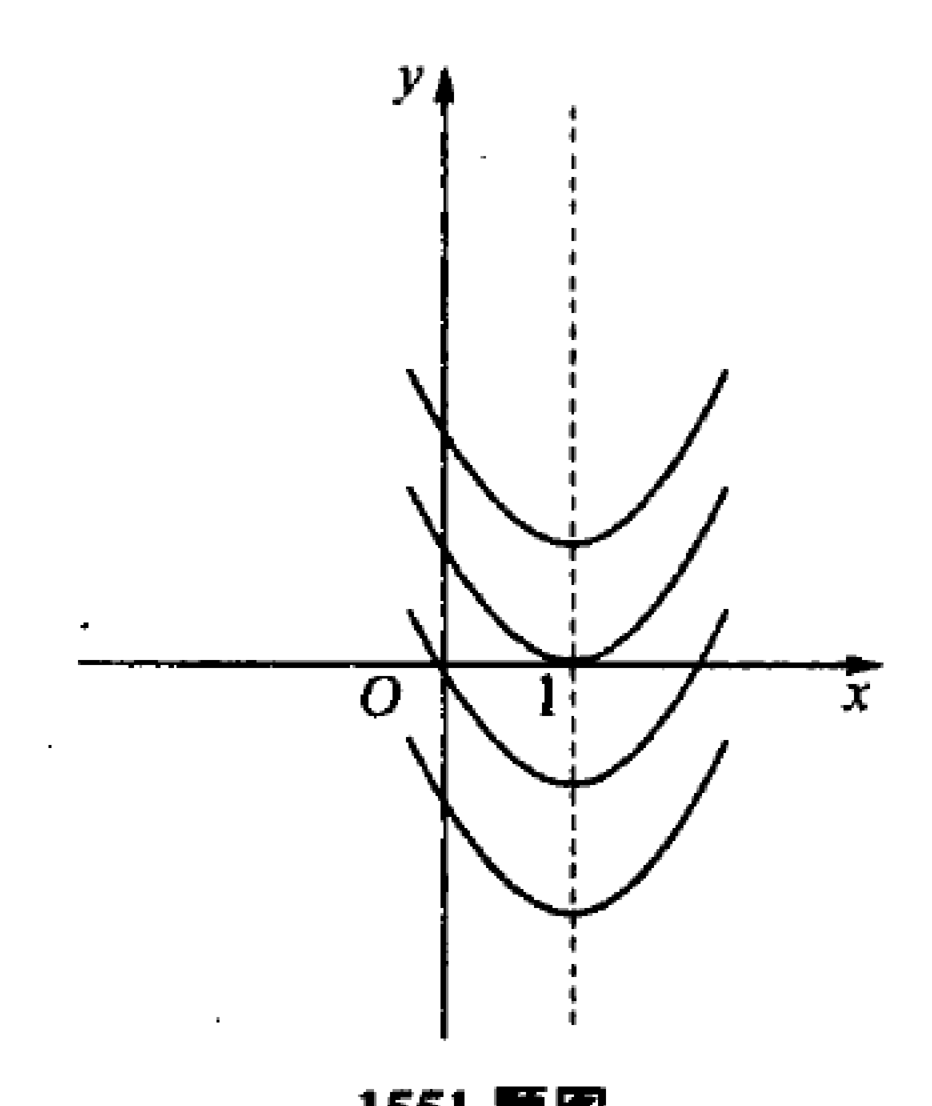
则 $$f'(\varphi)=2\sin\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{1-4\cos\varphi}}-1\right),$$

当$\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$时，$\sqrt{1-4\cos\varphi}>1$.

从而 $$f'(\varphi)<0,$$

故 $$f(\varphi)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

所以 $r'_\varphi<0$，即 r 随 φ 的增加而单调下降，且当 $\varphi=\pi$ 时达到极小值.



1551 题图

$$r=\frac{1-\sqrt{5}}{-2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.61,$$

如 1550 题图所示.

作出下列曲线族的图形(a 为可变参数)(1551 ～ 1555).

【1551】 $y=x^2-2x+a$.

解 将方程变形为

$$y-(a-1)=(x-1)^2,$$

这是以$(1,a-1)$为顶点.

$x=1$ 为对称轴，开口向上的抛物线族，如 1551 题图所示.

【1552】 $y = x + \frac{a^2}{x}$.

解　当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$.

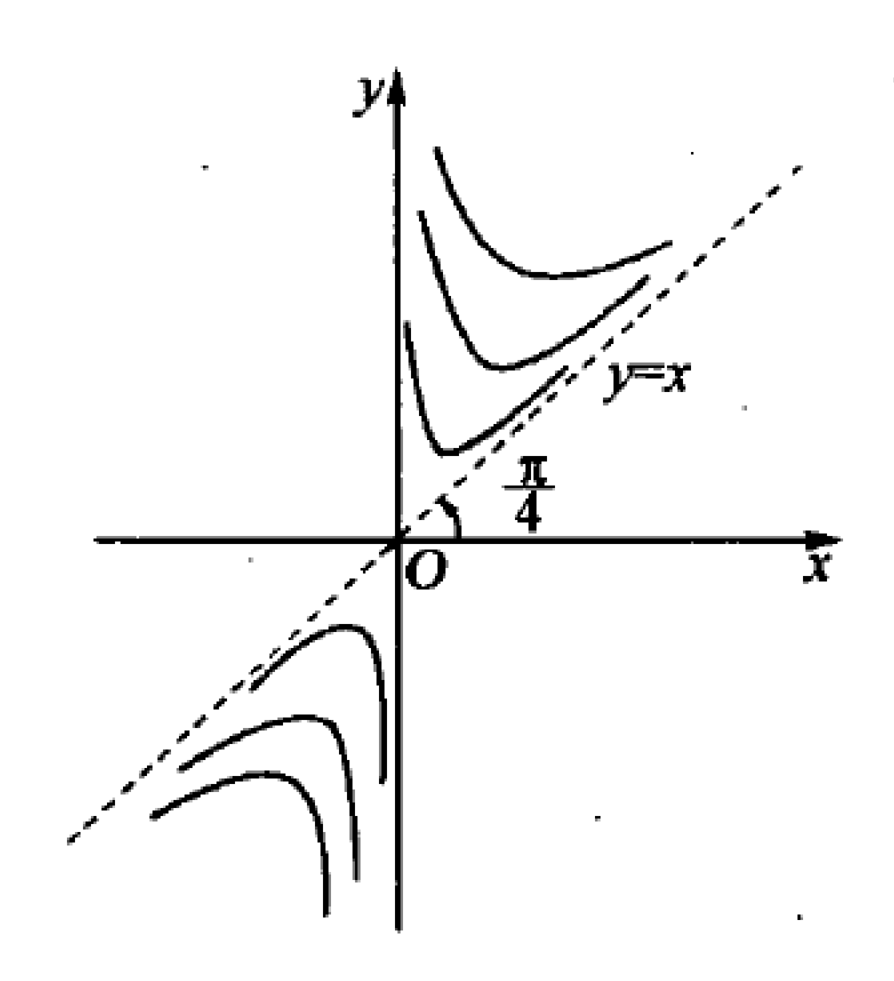
当 $a \neq 0$ 时，为双曲线族，其图形可由 $y = x$ 和 $y = \frac{a^2}{x}$ 相加而成，它们以 $y = x$ 及 $x = 0$ 为渐近线. 而

$$y' = 1 - \frac{a^2}{x^2},$$

所以，当 $x = |a|$ 时，有极小值 $y = 2|a|$.

当 $x = -|a|$ 时，有极大值 $y = -2|a|$.

如 1552 题图所示.



1552 题图

【1553】 $y = x \pm \sqrt{a(1 - x^2)}$.

解　$y - x = \pm \sqrt{a(1 - x^2)}$,

即　　$(y - x)^2 + ax^2 = a$.

作仿射变换 $u = -x + y, v = x$.

则方程变为 $u^2 + av^2 = a$,

当 $0 < a < +\infty$ 时，为椭圆族；

当 $-\infty < a < 0$ 时，为双曲线族；

当 $a = 0$ 时，为直线 $y = x$.

显然全曲线族通过点 $(-1, -1)$ 及 $(1, 1)$（图形略）.

【1554】 $y=\frac{x}{2}+e^{-ax}$.

解 原方程可变形为 $y-\frac{x}{2}=e^{-ax}$，作仿射变换 $u=y-\frac{x}{2}$，$v=x$，则方程化为 $u=e^{-av}$.

当 $a\neq 0$ 时，表示一指数曲线族. 当 $a=0$ 时，表示直线 $y=\frac{x}{2}+1$. 全曲线族通过点 $(0,1)$. 显然 $y=\frac{x}{2}$ 为曲线族的渐近线.

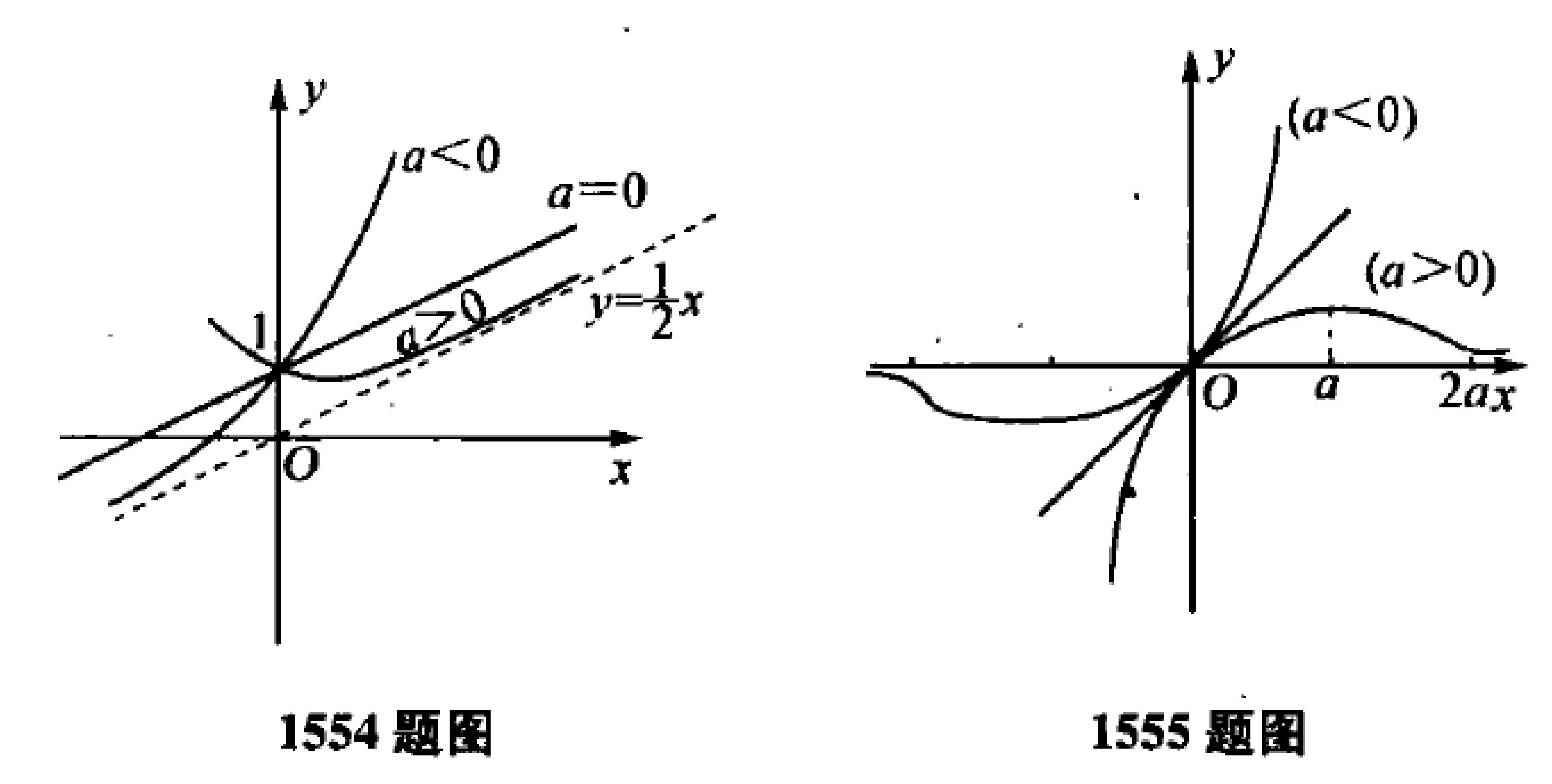
$$y'=\frac{1}{2}-ae^{-ax}.$$

令 $y'=0$ 得，$x=\frac{1}{a}\ln(2a)$.

若 $a>0$，则当 $0<x<\frac{1}{a}\ln(2a)$ 时，$y'>0$. 当 $x>\frac{1}{a}\ln(2a)$ 时，$y'<0$. 故当 $x=\frac{1}{a}\ln(2a)$ 时有极小值

$$y=\frac{1}{2a}(1+\ln 2a).$$

若 $a\leqslant 0$，则 $y'>0$. 故函数增大 $y''=a^2e^{-ax}>0$. 故曲线是凹的，如 1554 题图所示.



1554 题图 **1555 题图**

【1555】 $y=xe^{-\frac{x}{a}}$.

解 显然，全曲线族通过原点.

当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-\frac{x}{a}} = 0$.

当 $a<0$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-\frac{x}{a}} = 0$.

故 $y=0$ 为曲线的渐近线.

$$y' = e^{-\frac{x}{a}}\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

令 $y'=0$ 得 $x=a$,

$$y'' = e^{-\frac{x}{a}}\left(\frac{x}{a^2}-\frac{2}{a}\right).$$

令 $y''=0$ 得 $x=2a$,

$$y''|_{x=a} = -\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}.$$

故若 $a>0$，在 $x=a$ 处有极大值 $y=ae^{-1}$，若 $a<0$，在 $x=a$ 处有极小值 $y=ae^{-1}$，拐点 $x=2a$，$y=2ae^{-2}\approx 0.27a$. $y''|_{x=0}=1$，故曲线族在原点与直线 $y=x$ 相切如 1555 题图所示.

§13. 函数的极大值与极小值问题

【1556】 证明：如果 $f(x)$ 是非负函数，则函数

$$F(x) = Cf^2(x) \qquad (C>0)$$

与函数 $f(x)$ 有相同的极值点.

证 设 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点，则存在 x_0 的一个邻域 $N_\delta(x_0)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$，使得当 $x\in N_\delta(x_0)$，且 $x\neq x_0$ 时

$$f(x_0)>f(x).$$

由于 $C>0$ 及 $f(x)\geqslant 0$，则有

$$Cf^2(x_0)>Cf(x_0)f(x)\geqslant Cf(x)^2.$$

即 $F(x_0)>F(x)$. 所以 x_0 是 $F(x)$ 的极大值点. 反之，若 x_0 是 $F(x)$ 的极大值点. 则存在 x_0 的一个邻域 $N_\delta(x_0)$ 使得当 $x\in N_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ 时，$F(x_0)>F(x)$，即 $Cf^2(x_0)>Cf^2(x)$. 由于 $C>0$ 及 $f(x)\geqslant 0$ 有

$$f(x_0)=|f(x_0)|>|f(x)|=f(x).$$

即 $f(x_0)>f(x)$. 这就证明了 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点. 因此, $f(x)$ 与 $F(x)$ 有相同的极大值点, 同样可证, $f(x)$ 与 $F(x)$ 有相同的极小值点.

【1557】 证明: 如果 $-\infty<x<+\infty$ 时函数 $\varphi(x)$ 在严格单调递增, 则函数 $f(x)$ 与 $\varphi(f(x))$ 有相同的极值点.

证 设 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点, 则存在 x_0 的一个邻域 $N_\delta(x_0)$, 使得当 $x\in N_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ 时

$$f(x_0)>f(x). \qquad ①$$

由于 $\varphi(x)$ 是严格单调增加的, 故

$$\varphi(f(x_0))>\varphi(f(x)) \qquad (x\in N_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}). \qquad ②$$

即 x_0 是 $\varphi(f(x))$ 的极大值点. 反之, 若 x_0 是 $\varphi(f(x))$ 的极大值点, 则 ② 式成立. 由 $\varphi(x)$ 的严格单调性知 ① 也成立, 即 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点. 因此, $f(x)$ 与 $\varphi(f(x))$ 有相同的极大值点. 同样可证, $f(x)$ 与 $\varphi(f(x))$ 有相同的极小值点. 证毕.

【1558】 两个正数之和是常数 a, 求这两个正数的 m 次幂与 n 次幂 $(m>0, n>0)$ 乘积的极大值.

解 设一正数为 x, 则另一正数为 $a-x(0<x<a)$, 所以, 我们要求

$$f(x)=x^m(a-x)^n \qquad (0<x<a),$$

的极大值. 由于

$$f'(x)=x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-(m+n)x].$$

令 $f'(x)=0$ 得

$$x=\frac{ma}{m+n} \qquad (0<x<a).$$

当 $0<x<\dfrac{ma}{m+n}$ 时, $f'(x)>0$.

当 $\dfrac{ma}{m+n}<x<a$ 时, $f'(x)<0$.

因此当 $x=\dfrac{ma}{m+n}$ 时, $f(x)$ 有极大值

$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right)=\frac{a^{m+n}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

【1559】 两个正数的乘积是常数 a，求这两个正数的 m 次幂与 n 次幂（$m>0, n>0$）之和的极小值.

解 设一正数 x，则另一正数为 $\frac{a}{x}$（$0<x<+\infty$），根据题意，要求函数

$$f(x)=x^m+\left(\frac{a}{x}\right)^n \qquad (0<x<+\infty),$$

的极小值. 由于

$$f'(x)=\frac{mx^{m+n}-na^n}{x^{n+1}}.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}$. 显然

当 $0<x<\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}$ 时，$f'(x)<0$.

当 $\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}<x<+\infty$ 时，$f'(x)>0$.

因此，当 $x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}$ 时，函数 $f(x)$ 有极小值.

$$f\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}\right]=(m+n)\left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}.$$

【1560】 在什么样的对数系中存在着等于对数本身的数？

解 设所求数为 a，则 $0<a<+\infty, a\neq 1$，问题即为 a 为怎样的表，才能存在数 $x>0$，使

$$\log_a x=x,$$

设 $$f(x)=x-\log_a x.$$

则 $$f'(x)=\frac{x\ln a-1}{x\ln a}.$$

当 $0<a<1$ 时，

$$f'(x)>0 \qquad (0<x<+\infty),$$

即 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 是严格单调增加，而

$$f(a)=a-1<0,$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}+1>0,$$

因此存在唯一的 $x_0\in\left(a,\frac{1}{a}\right)$使得 $f(x_0)=0$，即 $\log_a x_0=x_0$.

当 $1<a<+\infty$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{\ln a}$. 经判别知当 $x=\frac{1}{\ln a}$ 时，$f(x)$ 取到最小值

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right),=\frac{1}{\ln a}-\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right),$$

若 $f\left(\frac{1}{\ln a}\right)>0$ 知，不存在 x 使得 $f(x)=0$. 而

$$\frac{1}{\ln a}-\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)=\log_a e+\log_a(\ln a)$$

$$=\log_a(e\ln a),$$

所以当 $e\ln a>1$. 即 $a>e^{\frac{1}{e}}$ 时不存在 x 使 $\log_a x=x$.

若 $e\ln a=1$. 即 $a=e^{\frac{1}{e}}$，则 $f\left(\frac{1}{e}\right)=0$，即$\frac{1}{e}=\log_a\frac{1}{e}$.

若 $e\ln a<1$. 即 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ 时，$f\left(\frac{1}{\ln a}\right)<0$. 而

$$\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

知存在 $x_1\in\left(0,\frac{1}{\ln a}\right)$及 $x_2\in\left(\frac{1}{\ln a},+\infty\right)$，使得

$$f(x_1)=0,f(x_2)=0,$$

亦即 $\quad x_1=\log_a x_1,x_2=\log_a x_2.$

综上所述，当$0<a<e^{\frac{1}{e}}$，且$a\neq 1$时，存在$x>0$，使得$x=\log_a x$.

【1561】 从面积为 S 的所有矩形中，求出周长是最小的矩形.

解 设矩形的一条边长为 x，则另一条边长为$\frac{S}{x}$，则其周长

为 $$f(x)=2\left(x+\frac{S}{x}\right),$$

而 $$f'(x)=2\left(1-\frac{S}{x^2}\right),$$

由 $f'(x)=0$ 得 $x=\sqrt{S}$，当 $0<x<\sqrt{S}$，$f'(x)<0$. 当 $\sqrt{S}<x<+\infty$ 时，$f'(x)>0$.

故 $f(\sqrt{S})$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最小值.

因此，所求矩形为以 $\sqrt{S}$ 为边的正方形.

【1562】 如果直角三角形的一条直角边与斜边的和是常数，求面积最大的直角三角形.

解 设一条直角边为 x，则根据题设另一条直角边为

$$\sqrt{(a-x)^2-x^2}=\sqrt{a^2-2ax},$$

其中 a 为定常数，$0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}$. 故直角三角形的面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-2ax}.$$

则 $$S'(x)=\frac{a^2-3ax}{2\sqrt{a^2-2ax}}.$$

令 $S'(x)=0$ 得 $x=\frac{a}{3}$.

当 $0<x<\frac{a}{3}$，$S'(x)>0$.

当 $\frac{a}{3}<x<\frac{a}{2}$ 时，$S'(x)<0$.

故 $S\left(\frac{a}{3}\right)$ 为 $S(x)$ 在 $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ 内的最大值. 此时，斜边长为 $a-\frac{a}{3}=\frac{2a}{3}$，它是一直角边的两倍，故此直角三角形的两锐角分别为 30° 及 60°.

【1563】 在怎样的尺度下，容积为 V 的圆柱形封闭罐的总表面积是最小的?

解 设底面半径为 x，则高为 $h=\frac{V}{\pi x^2}$. 故圆柱的表面积为

$$S(x)=2\pi x\cdot\frac{V}{\pi x^2}+2\pi x^2=2\pi x^2+\frac{2V}{x},$$

而
$$S'(x)=\frac{4\pi x^3-2V}{x^2},$$

令 $S'(x)=0$ 得 $x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

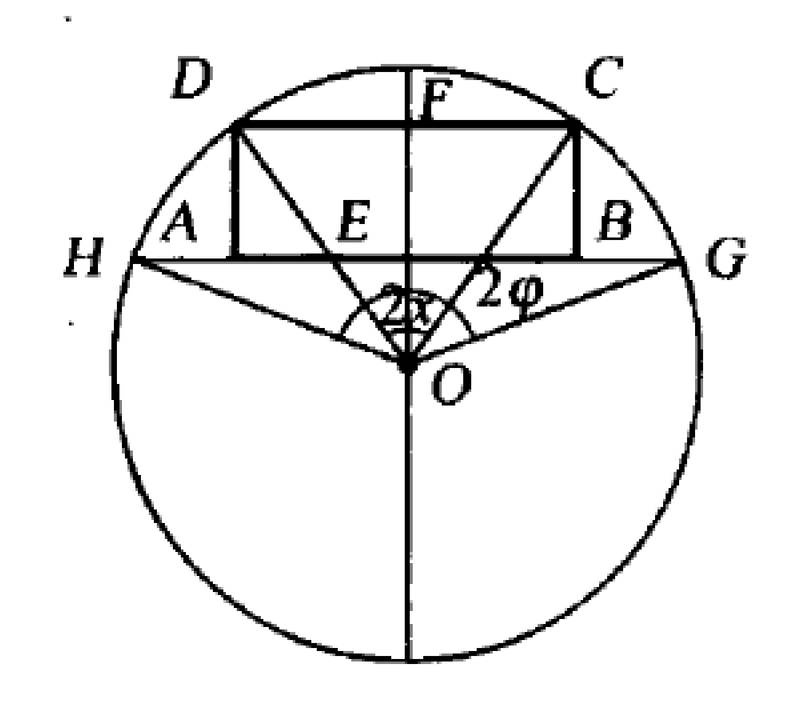
当 $0<x<\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，$S'(x)<0$.

当 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}<x<+\infty$ 时，$S'(x)>0$.

故 $S\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)=\sqrt[3]{54\pi V^2}$ 为 $S(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最小值. 因此当底面半径为 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，高为 $\frac{V}{2\pi x^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时有最小面积 $\sqrt[3]{54\pi V^2}$.

【1564】 在不超过半圆的已知弓形内嵌入面积最大的矩形.

解 如 1564 题图所示，不妨设圆的半径为单位长度. 弓形所对的圆心角为 2φ(常数)，所嵌入的矩形 $ABCD$ 所确定的弧 $\overset{\frown}{CD}$. $\overset{\frown}{CD}$ 所对应的圆心角为 $2x$，即



1564 题图

$$\angle HOG=2\varphi,\angle COD=2x.$$

则
$$OE=\cos\varphi,FC=\sin x,$$

$$EF = \cos x - \cos\varphi.$$

从而矩形面积为

$$S(x) = 2FC \cdot EF$$
$$= 2\sin x(\cos x - \cos\varphi)$$
$$= \sin 2x - 2\sin x\cos\varphi),$$

而 $$S'(x) = 2\cos 2x - 2\cos x \cdot \cos\varphi$$
$$= 4\cos^2 x - 2\cos x \cdot \cos\varphi - 2.$$

令 $S'(x) = 0$,并注意到 $\cos x \geqslant 0$ 得

$$\cos x = \frac{\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + 8}}{4}.$$

由于 $$x \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

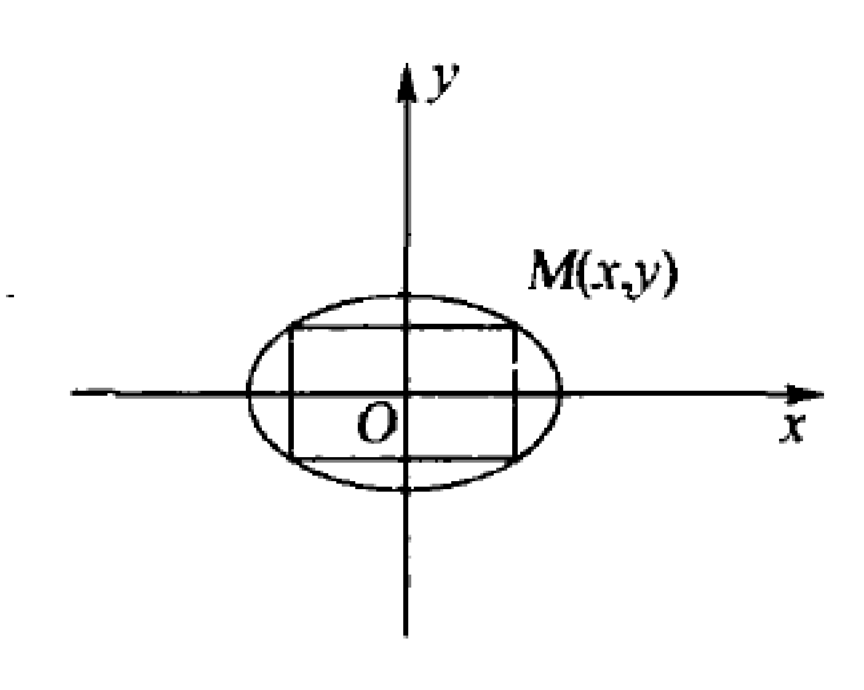
故 $$\cos\varphi \leqslant \cos x.$$

于是有 $$S''(x) = -4\sin 2x + 2\sin x\cos\varphi$$
$$\leqslant -4\sin 2x + 2\sin x\cos x$$
$$= -3\sin 2x < 0,$$

这说明当 $x = \arccos\dfrac{\cos\varphi + \sqrt{\cos^2 x + 8}}{4}$ 时,$S(x)$ 达到极大值. 由于只有一个极大值,所以它也是 $0 \leqslant x \leqslant \varphi$ 内的最大值.

【1565】 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 中嵌入边长平行于椭圆轴的面积最大的矩形.

解 如1565题所示设椭圆方程为



1565 题图

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

设 $M(x,y)$ 为矩形的在第一象限的顶点. 因为 $M(x,y)$ 在椭圆. 故须满足椭圆方程. 因此

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

所以矩形面积为

$$S(x)=4\frac{b}{a}\cdot x\sqrt{a^2-x^2}\qquad(0\leqslant x\leqslant a),$$

$$S'(x)=4\frac{b}{a}\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

令 $S'(x)=0$ 得 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

当 $0\leqslant x<\frac{a}{\sqrt{2}}$ 时 $S'(x)>0$.

当 $\frac{a}{\sqrt{2}}<x<a$ 时, $S'(x)>0$.

故当 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 时, $S(x)$ 取 $[0,a]$ 上的最大值 $S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=2ab$.

即当矩形的边长分别为 $\sqrt{2}a$ 和 $\sqrt{2}b$ 时, 矩形面积为最大, 最大面积为 $2ab$.

【1566】 在底边为 b, 高为 h 的三角形中, 嵌入周长最大的矩形. 研究此问题有解的可能性.

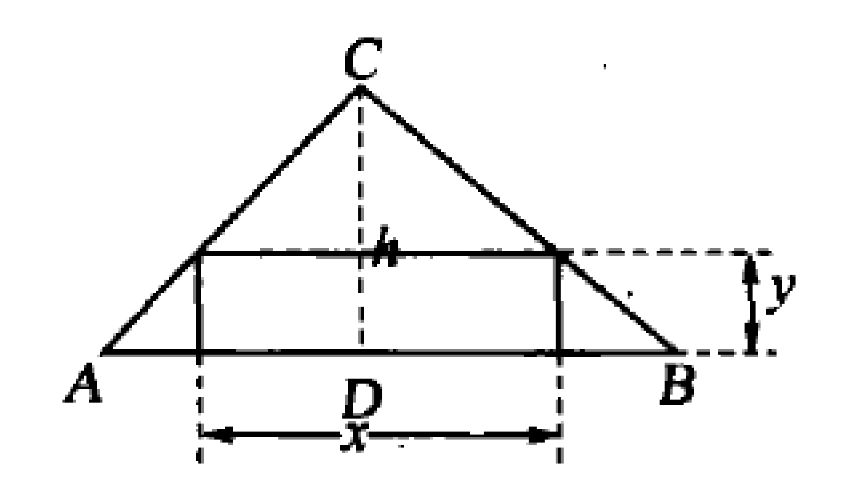
解 如 1566 题图所示 $AB=b$, $CD=h$, 设嵌入矩形的边长分别为 x,y. 如图所示, 则

$$\frac{x}{b}=\frac{h-y}{h},$$

故 $$x=\frac{b}{h}(h-y).$$

矩形的周长为

$$p(y)=2\left[y+\frac{b}{h}(h-y)\right]$$



1566 题图

$$= 2\left[\left(1-\frac{b}{h}\right)y + b\right],$$

显然，当 $h = b$ 时，周长 $p = 2b$ 为一定值. 当 $h > b$ 时，

$$p'(y) = 2\left(1-\frac{b}{h}\right) > 0,$$

所以，p 单调增加，故当 $y = h$ 时，有边界极大值 $p = 2h$，但此时 $x = 0$，所嵌入的矩形不允许边长为 0. 故此时嵌入的矩形有最大周长者是不存在的，即问题无解. 同样，当 $h < b$ 时，问题无解.

【1567】 用直径为 d 的圆木切出矩形横断面的梁，此矩形的底为 b，高为 h，如果梁的强度同 bh^2 成正比，最大强度的梁的尺寸应是多少？

解 由于 $b^2 + h^2 = d^2$，

故 $h^2 = d^2 - b^2$，

从而知要求

$$f(b) = b(d^2 - b^2),$$

何时取最大值. 由于 $f'(b) = d^2 - 3b^2$，

由 $f'(b) = 0$ 得 $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

当 $0 < b < \frac{d}{\sqrt{3}}$ 时，$f'(d) > 0$.

当 $\frac{d}{\sqrt{3}} < b < d$ 时，$f'(d) < 0$.

从而知 $f\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)$ 为 $f(b)$ 在 $(0,d)$ 内的最大值. 此时 $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$. 即所

求矩形的底为$\frac{d}{\sqrt{3}}$,高为$d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

【1568】 在半径为R的半球内,嵌入体积最大的以正方形为底的长方体.

解 设六面体的底面边长为$2x$,高为$2y$,则有

$$2x^2+y^2=R^2 \qquad \left(0<x<\frac{R}{\sqrt{2}}\right),$$

从而 $y=\sqrt{R^2-2x^2}$.

六面体的体积为

$$V(x)=(2x)^2\cdot 2y=8x^2\sqrt{R^2-2x^2},$$

$$V'(x)=\frac{16x(R^2-3x^2)}{\sqrt{R^2-2x^2}}.$$

令$V'(x)=0$得$x=\frac{R}{\sqrt{3}}$,$x=0$(舍去).

当$0<x<\frac{R}{\sqrt{3}}$时,$V'(x)>0$.

当$\frac{R}{\sqrt{3}}<x<\frac{R}{\sqrt{2}}$时,$V'(x)<0$.

所以$V\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$为最大值,此时$y=\frac{R}{\sqrt{3}}$.即当六面体为正方体时,体积最大,最大体积为$V\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)=\frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$.

【1569】 在半径为R的球体内嵌入体积最大的圆柱.

解 设圆柱的底面半径为r,高为$2h$,则有

$$r^2+h^2=R^2 \qquad (0\leqslant r\leqslant R),$$

即 $h=\sqrt{R^2-r^2}$.

故圆柱的体积为

$$V(r)=\pi r^2\cdot(2h)=2\pi r^2\sqrt{R^2-r^2},$$

$$V'(r)=\frac{2\pi r(2R^2-3r^2)}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

令 $V'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}R$ 及 $r=0$(舍去).

当 $0\leqslant r<\sqrt{\frac{2}{3}}R$ 时,$V'(r)>0$.

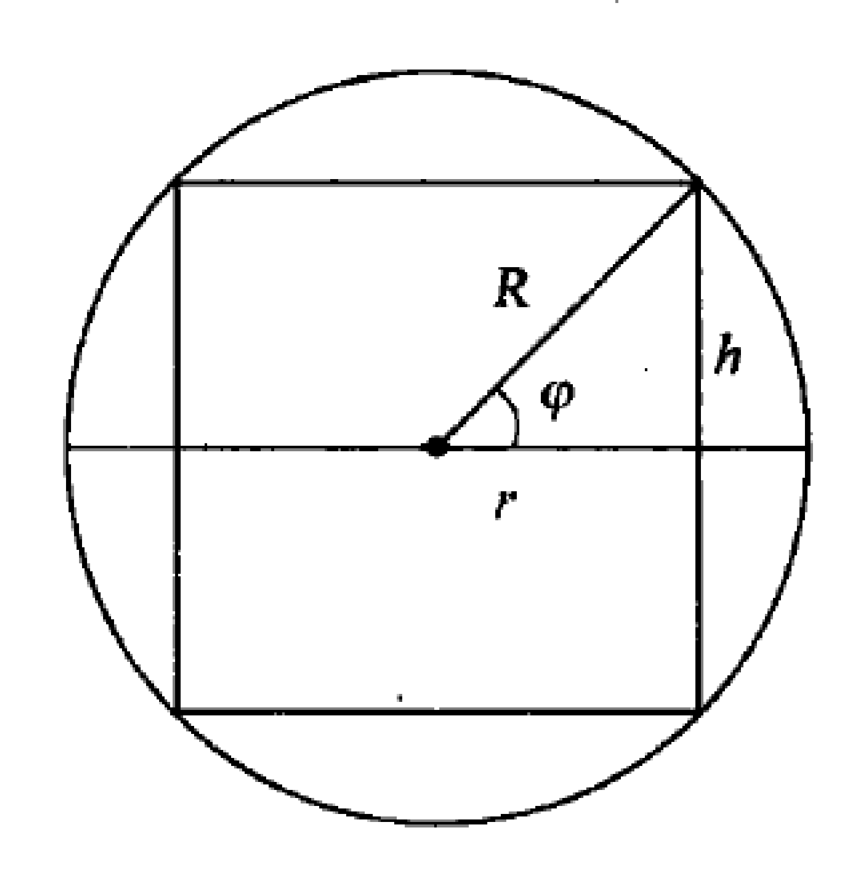
当 $\sqrt{\frac{2}{3}}R<r<R$ 时,$V'(r)<0$.

所以 $V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)$ 为 $V(r)$ 在 $[0,R]$ 的最大值. 此时 $h=\frac{R}{\sqrt{3}}$,且

$$V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

【1570】 在半径为 R 的球体内嵌入表面积最大的圆柱.

解 如 1570 题图所示设圆柱底半径为 r,高为 $2h$. 则有



1570 题图

$$r=R\cos\varphi, h=R\cdot\sin\varphi.$$

从而圆柱的表面积为

$$\begin{aligned}S&=2\pi r^2+2\pi r\cdot(2h)\\&=2\pi R^2\cos^2\varphi+4\pi R^2\sin\varphi\cos\varphi.\\&=\pi R^2(1+\cos2\varphi)+2\pi R^2\sin2\varphi.\end{aligned}$$

则 $$\frac{dS}{d\varphi}=-2\pi R^2\sin2\varphi+4\pi R^2\cos2\varphi,$$

令 $\frac{dS}{d\varphi}=0$ 得 $\tan2\varphi=2$,其解为

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\arctan 2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

于是 $\sin 2\varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{5}},$

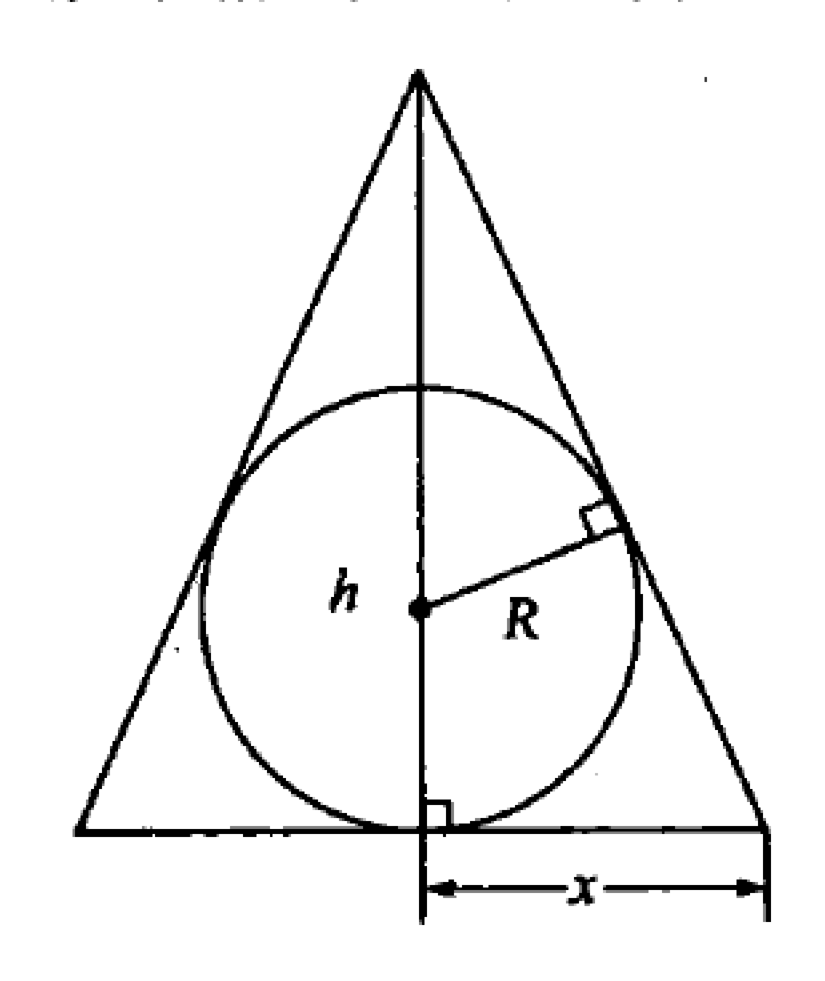
而 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -4\pi R^2[2\sin 2\varphi_0 + \cos 2\varphi_0] = -4\sqrt{5}\pi R^2 < 0,$

故当 $\varphi = \varphi_0$ 时，表面积最大，最大表面积为

$$S = \pi R^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi R^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \pi R^2(1 + \sqrt{5}).$$

【1571】 对已知球作体积最小的外切圆锥.

解 设外切圆锥的底面半径为 x，高为 h，则



1571 题图

$$\frac{x}{R} = \frac{h}{\sqrt{(h-R)^2 - R^2}},$$

解之得 $h = \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2}.$

于是外切圆锥体的体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot h = \frac{2\pi R}{3} \cdot \frac{x^4}{x^2 - R^2} \qquad (x > R),$$

$$V'_x = \frac{4\pi R}{3} \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2}.$$

令 $V'_x = 0$，得 $x = \sqrt{2}R$，其他根不合要求，故舍去.

当 $R < x < \sqrt{2}R$ 时，$V'_x < 0$.

当 $\sqrt{2}R < x < +\infty$ 时，$V'_x > 0$.

故当 $x = \sqrt{2}R$ 时，V 有最小值

$$V(\sqrt{2}R) = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3,$$

所以，外切圆锥的最小体积为球体体积的两倍.

【1572】 求出母线为 l 的圆锥的最大体积.

解 设圆锥的底面半径为 x，高为 h，则

$$h = \sqrt{l^2 - x^2}.$$

故圆锥的体积为

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{l^2 - x^2} \qquad (0 < x < l),$$

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi\frac{x(2l^2 - 3x^2)}{\sqrt{l^2 - x^2}}.$$

令 $V'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt{\frac{2}{3}}l$.

经判别知 $V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 为最大值.

因此，所求圆锥的底面半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$. 高为 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 最大体积为

$$V\left(\frac{2}{3}l\right) = \frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}.$$

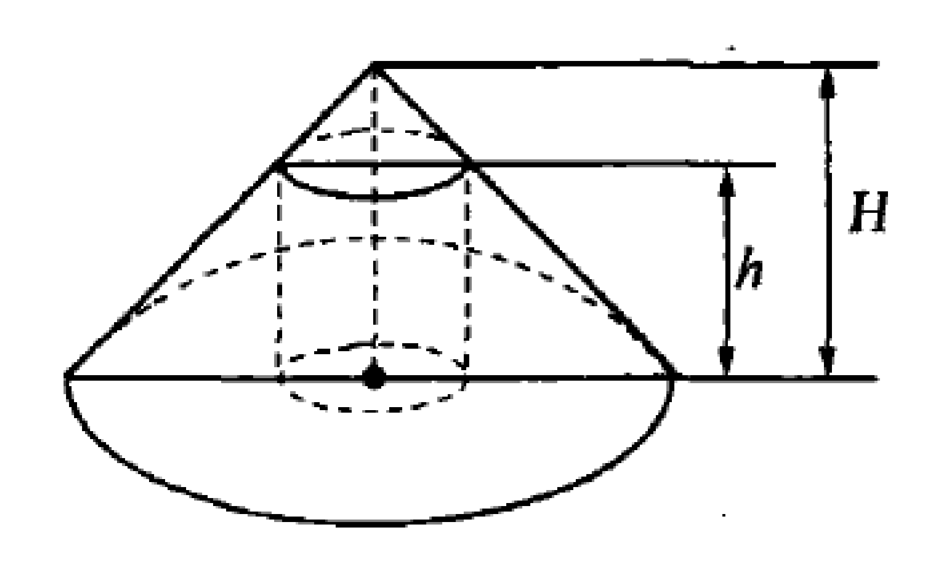
【1573】 在顶角为 2α 且底半径为 R 的直圆锥内，嵌入表面积最大的圆柱.

解 设 x 为圆的底面半径，h 为圆柱的高，H 为圆锥的高（如1573题图所示），则

$$\frac{h}{H} = \frac{R - x}{R},$$

故 $$h = \frac{R - x}{R}H,$$

其中 $H = R\cot\alpha$ 为常数.



1573 题图

故圆柱的表面积为

$$S(x)=2\pi x^2+2\pi x\cdot h$$
$$=2\pi\left[x^2+x\left(1-\frac{x}{R}\right)H\right]\qquad(0\leqslant x\leqslant R).$$

于是 $$S'(x)=2\pi\left(2x+H-\frac{2x}{R}H\right).$$

令 $S'(x)=0$ 解得

$$x=\frac{RH}{2(H-R)},$$

此值应在 0 与 R 之间,故有 $R<H$. 且

$$\tan\alpha=\frac{R}{H}<\frac{1}{2},$$

显然,此时当

$$x=\frac{RH}{2(H-R)}=\frac{R}{2(1-\tan\alpha)}$$

时,$S(x)$ 有最大值.

【1574】 求出点 $M(p,p)$ 到抛物线 $y^2=2px$ 的最短距离.

解 只要考虑函数

$$f(y)=(x-p)^2+(y-p)^2$$
$$=x^2-2px+p^2+y^2-2py+p^2$$
$$=x^2+2p^2-2py$$
$$=\frac{y^4}{4p^2}-2py+2p^2,$$

的极值即可.

$$f'(y)=\frac{y^3-2p^3}{p^2}.$$

令 $f'(y)=0$ 得 $y=\sqrt[3]{2}p$.

经讨论知 $f(\sqrt[3]{2}p)$ 为最小值. 因此,最短距离为

$$\sqrt{f(\sqrt[3]{2}p)}=\sqrt{\frac{2^{\frac{4}{3}}p^4}{4p^2}+2p^2+2\sqrt[3]{2}p^2}$$
$$=p\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2}}{2}+2-2\sqrt[3]{2}}.$$

【1575】 求出点 $A(2,0)$ 至圆 $x^2+y^2=1$ 的最短和最长距离.

解 显然,最短距离为 1,最长矩离为 3. 事实上,求

$$f(x)=(x-2)^2+y^2=5-4x.$$

在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值. 由于 $f(x)$ 为线性函数,故最大值,最小值只能在边界上取到,显然 $f(-1)=9$ 为最大值,$f(1)=1$ 为最小值. 故最长距离为 $\sqrt{f(-1)}=3$,最短距离为 $\sqrt{f(1)}=1$.

【1576】 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<a)$ 经过顶点 $(0,-b)$ 的最大弦.

解 我们首先求下面函数的极值

$$f(x)=x^2+(y+b)^2=x^2+y^2+2by+b^2$$
$$=\left(a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2\right)+y^2+2by+b^2$$
$$=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y^2+2by+a^2+b^2.$$

则 $$f'(y)=2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y+2b.$$

令 $f'(y)=0$ 得

$$y=\frac{b^3}{a^2-b^2}=\frac{b^3}{c^2}\qquad(c=\sqrt{a^2-b^2}).$$

要使 $y=\frac{b^3}{c^2}$ 为椭圆上点的纵坐标必须 $\frac{b^3}{c^2}\leqslant b$,即 $b^2\leqslant c^2$. 亦即 $b\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$. 经判别知当 $y=\frac{b^3}{c^2}\left(b\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 时,$f(y)$ 取最大值

$$f\left(\frac{b^3}{c^2}\right)=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{b^6}{c^4}+2b\frac{b^3}{c^2}+a^2+b^2=\frac{a^4}{c^2},$$

此时 $x=\pm\frac{a^2}{c^2}\sqrt{a^2-2b^2}$,

因此,最大弦为

$$\sqrt{f\left(\frac{b^3}{c^2}\right)}=\frac{a^2}{c},$$

弦的一端为$(0,b)$,另一端为$\left(\pm\frac{a^2}{c^2}\sqrt{a^2-2b^2},\frac{b^3}{c^2}\right)$.

若$b>\frac{a}{\sqrt{2}}$,则当$-b\leqslant y\leqslant b$时,

$$f'(y)=2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y+2b>2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)(-b)+2b$$
$$=\frac{2a^2}{b}>0,$$

故当$y=b,x=0$时,取得弦长的边界最大值,此时最大弦长为$2b$.

【1577】 过椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

上的点$M(x,y)$引出一条与坐标轴构成一个面积最小的三角形的切线.

解 切线斜率为$k=-\frac{b^2x}{a^2y}$. 于是切线方程为

$$Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x),$$

不失一般性. 设点M在第一象限. 于是切线在两坐标轴上的截距分别为$\frac{a^2}{x}$,$\frac{b^2}{y}$. 因此,所求三角形的面积为

$$S(x)=\frac{a^2b^2}{2xy}=\frac{a^3b}{2x\sqrt{a^2-x^2}},$$

要求$S(x)$在$(0,a)$内的最小值点,只须求出

$$f(x)=x^2\cdot(a^2-x^2),$$

在(0,a)内的最大值点.而

$$f'(x)=2a^2x-4x^3.$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$,经讨论知 $f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 为 $f(x)$ 在(0,a)内的最大值.此时 $y=\frac{b}{\sqrt{2}}$.因此在点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 所引的切线与坐标轴构成的三角形面积为最小,最小面积为

$$S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\frac{a^2b^2}{2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}}=ab.$$

【1578】 一物体是个直圆柱体,其上端为半球形,如果此物体的体积等于V,问在处怎样的尺寸下此物体的表面积是最小的?

解 设 x 为圆柱的底面半径,h 为圆柱的高,则据题设有

$$V=\frac{2}{3}\pi x^3+\pi x^2\cdot h.$$

即
$$h=\frac{V}{\pi x^2}-\frac{2}{3}x.$$

故其表面积为

$$S(x)=3\pi x^2+2\pi x\cdot\left(\frac{V}{\pi x^2}-\frac{2}{3}x\right)=\frac{5\pi}{3}x^2+\frac{2V}{x},$$

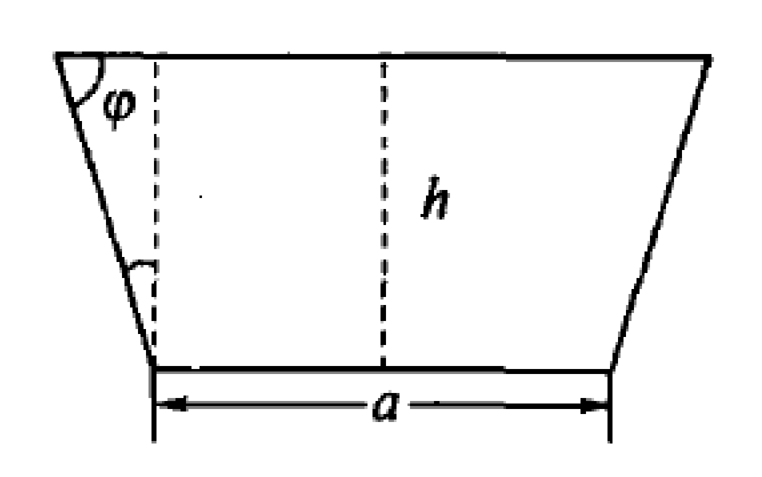
$$S'(x)=\frac{10\pi}{3}x-\frac{2V}{x^2}.$$

令 $S'(x)=0$,得 $x=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$.经讨论知 $S\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}\right)$ 为最小值,此时 $h=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$,即当 $x=h=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ 时,表面积最小.

【1579】 明渠的横断面为等腰梯形,如果渠道中流水的横断面的面积等于S,水位等于h.渠道两侧的坡度φ是多少,才能使断面被水浸湿的周长是最小的?

解 浸水周长为 $l=a+2h\csc\varphi$

其中 a 为底边长.又截面积为



1579 题图

$$S = \frac{1}{2}(2a + 2h\cot\varphi)h = ah + h^2\cot\varphi,$$

所以 $$l = \frac{S}{h} - h\cot\varphi + 2h\csc\varphi,$$

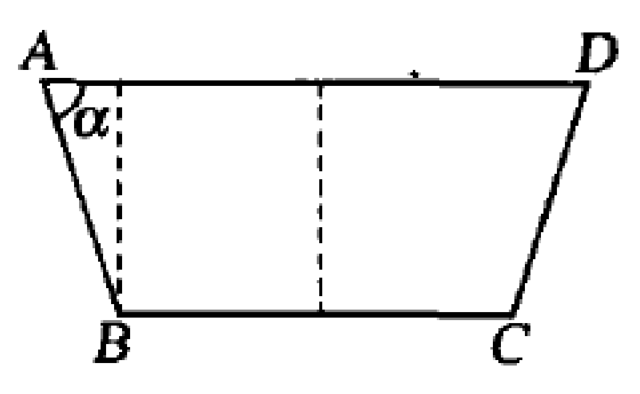
$$\frac{dl}{d\varphi} = \frac{h}{\sin^2\varphi} - 2h\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

令 $\frac{dl}{d\varphi} = 0$ 得 $\cos\varphi = \frac{1}{2}$，所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$. 经讨论知，当 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 时，l 有最小值，所以当 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 时，横断面积被水浸周长为最小.

【1580】 假设封闭曲线所围的面积为 S 圆周也包围同样的面积 S，则封闭曲线的周长与圆周长的比称为该曲线的"弯曲性".

设等腰梯形 $ABCD(AD \parallel BC)$ 的底边 $AD = 2a$，锐角 $BAD = \alpha$，等腰梯形形状如何才会有最小的弯曲性?

解 设腰 $AB = CD = x$，则梯形的周长为



$$l = 4a + 2x(1 - \cos\alpha).$$

梯形的面积为 $S = (2a - x\cos\alpha)x\sin\alpha$.

令 $S = \pi R^2$ 得 $R = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{(2a - x\cos\alpha)x\sin\alpha}$.

相应的圆周长为 $L = 2\pi R = 2\sqrt{\pi(2a - x\cos\alpha)x\sin\alpha}$，

则弯曲性 k 为 $k = \frac{l}{L} = \frac{2a + x(1 - \cos\alpha)}{\sqrt{\pi(2a - x\cos\alpha)x\sin\alpha}}$，

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}=\frac{a\sin\alpha[x(1+\cos\alpha)-2a]}{\sqrt{\pi}[(2a-x\cos\alpha)x\sin\alpha]^{\frac{3}{2}}}.$$

令$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}=0$得$x=a\sec^2\frac{\alpha}{2}$，经讨论知此时$k$有最小值. 即当$AB=CD=a\sec^2\frac{\alpha}{2}$时，梯形具有最小的弯曲性.

【1581】 从半径为R的圆中应切去怎样的扇形，才能使剩余部分可卷成一个容积最大的漏斗?

解 设余下部分的中心角为x，则漏斗(圆锥)底面的周长为Rx，底面半径为$\frac{Rx}{2\pi}$，其高为

$$h=\sqrt{R^2-\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2},$$

则容积为

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}$$
$$=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}\qquad(0<x<2\pi).$$

为求$V(x)$的最大值点，我们只须求下面函数$f(x)$的最大值点

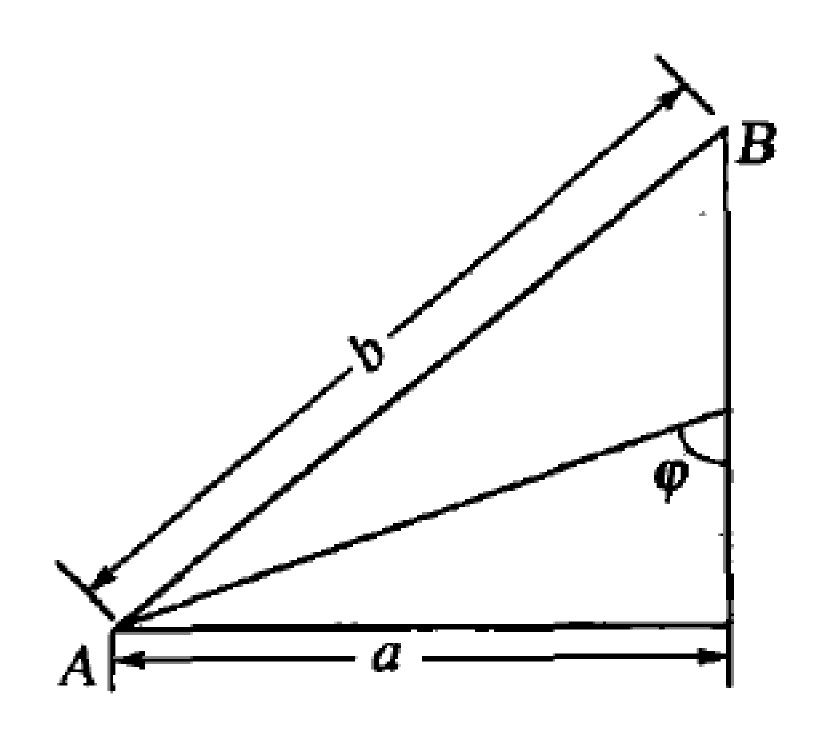
$$f(x)=x^4(4\pi^2-x^2)\qquad(0<x<2\pi),$$
$$f'(x)=16\pi^2x^3-6x^5.$$

令$f'(x)=0$得$x=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. 经讨论知$f\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$为最大值. 因此，所割去扇形的中心角应为$2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

【1582】 由南到北的铁路经过B城，工厂A距此铁路的最短距离为a千米，距北面的B城为b千米. 为了从A到B运输货物最经济，从工厂建设一条专用线，如果每吨货物沿专用线运输的价格为每千米p卢布，而沿铁路为每千米q卢布$(p>q)$，问专用线应该与铁路成怎样的角度φ?

解 所需运费为

$$F=(\sqrt{b^2-a^2}-a\cot\varphi)q+\sqrt{a^2+a^2\cot\varphi}p$$



1582 题图

$$= q\sqrt{b^2-a^2} - aq\cot\varphi + ap\csc\varphi,$$

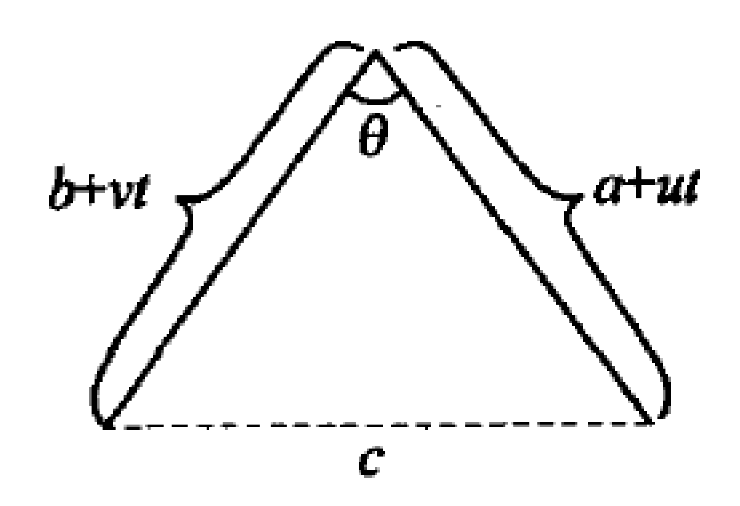
$$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{aq}{\sin^2\varphi} - \frac{ap\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

令 $\frac{dF}{d\varphi} = 0$ 得 $\varphi_0 = \arccos\frac{q}{p}$. 经讨论知 F 在 φ_0 取最小值.

故当 $\arccos\frac{q}{p} \geqslant \arctan\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}$ 时，取 $\varphi_0 = \arccos\frac{q}{p}$ 相应运费最省；当 $\arccos\frac{q}{p} < \arctan\frac{a}{b}$ 时，则取 $\varphi_0 = \arctan\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}$，即直接建侧轨联接 A 与 B 时运费最省.

【1583】 两船各以固定的速度 u 和 v 沿直线航行，彼此前进的方向成 θ 角，如果在某时刻它们与其路线交点的距离分别等于 a 和 b，求两船之间的最小距离.

解 设两船与路线交点分别为 a，b 时的时刻 $t_0 = 0$，则时刻 t 时两船的距离 S 满足：



1583 题图

$$f(t) = S^2$$

$$= (a+ut)^2+(b+vt)^2-2(a+ut)(b+vt)\cos\theta,$$

$$f'(t)=2(a+ut)+2(b+vt)v-2(bu+av+2uvt)\cos\theta.$$

令 $f'(t)=0$，解得

$$t_1=-\frac{au+bv-(av+bu)\cos\theta}{u^2+v^2-2uv\cos\theta}.$$

经讨论知，$f(t_1)$ 为最小值，且

$$f(t_1)=\frac{[(av-bu)\sin\theta]^2}{u^2+v^2-2uv\cos\theta},$$

因此，最小距离为

$$S=\frac{|av-bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}.$$

又两船之间的最小距离也可在 $t_0=0$ 之前达到，类以可求此时的最小距离为

$$S=\frac{|av+bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2ar\cos\theta}}$$

【1584】 在 A、B 二点处各有一光源，其烛光强度分别为 S_1 和 S_2，在线段 $AB=a$ 上求出最小照明点 M.

解 设 $AM=x$，则照度为

$$I=\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{(a-x)^2},$$

由 $$I'_x=-\frac{2S_1}{x^3}+\frac{2S_2}{(a-x)^3}.$$

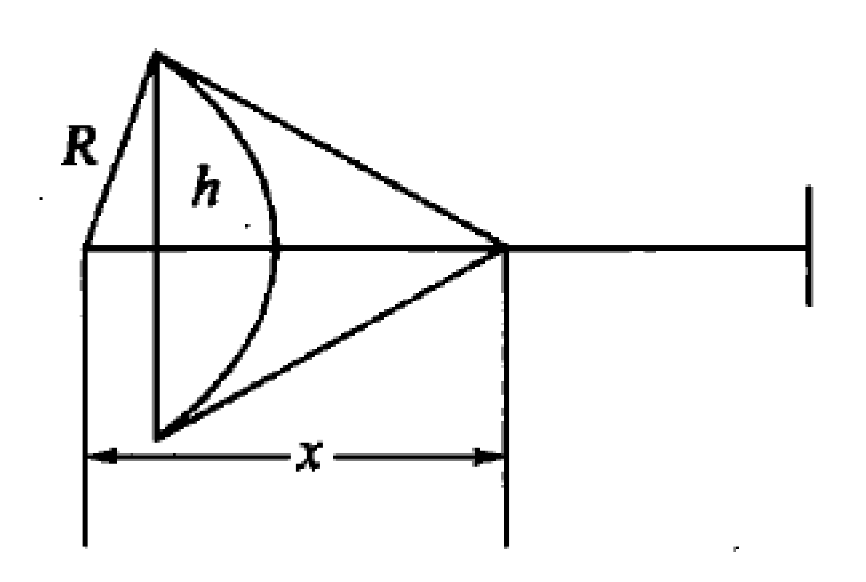
令 $I'_x=0$ 得 $S_2x^3=S_1(a-x)$.

解之得 $$x=a\left(1+\sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}}\right)^{-1},$$

经检验知 $I\left[a\left(1+\sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}}\right)^{-1}\right]$ 为最小值.

【1585】 发光点位于半径为 R 和 $r(R>r)$ 的两个互不相交的球的球心连线上，而且位于两个球之外，发光点在什么位置，才能使两个球表面照明部分的和是最大的？

解 设发光点离大球中心之距离为 x，两球中心之距离为 a. 则所照射到的大球球冠的高 h 满足



1585 题图

$$\frac{R-h}{R}=\frac{R}{x},$$

所以根据球冠面积公式知照明部分面积之和为

$$S(x)=2\pi R\left(R-\frac{R^2}{x}\right)+2\pi r\left(r-\frac{r^2}{a-x}\right)$$

$$(R<x\leqslant a-r),$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=2\pi R^3\cdot\frac{1}{x^2}-2\pi r^3\frac{1}{(a-x)^2}.$$

令$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=0$得 $x=\dfrac{a}{1+\left(\dfrac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}$,

又由 $x\leqslant a-r$ 可得$\dfrac{R^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{3}{2}}+r^{\frac{3}{2}}}a\leqslant a-r$,

即 $a\geqslant r+R\sqrt{\dfrac{R}{r}}$.

当 $a\geqslant r+R\sqrt{\dfrac{R}{r}}$,且 $x=\dfrac{a}{1+\left(\dfrac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}$ 时,照明面积最大.

当 $r+R<a<r+R\sqrt{\dfrac{R}{r}}$ 时,显然当 $x=a-r$ 时,照明面积最大.

【1586】 圆桌的半径为 a,应该在圆桌中央上方的什么位置安装电灯,才能使圆桌边沿上的亮度是最大的?

提示:照明亮度用下式表示

$$I = k\frac{\sin\varphi}{r^2}.$$

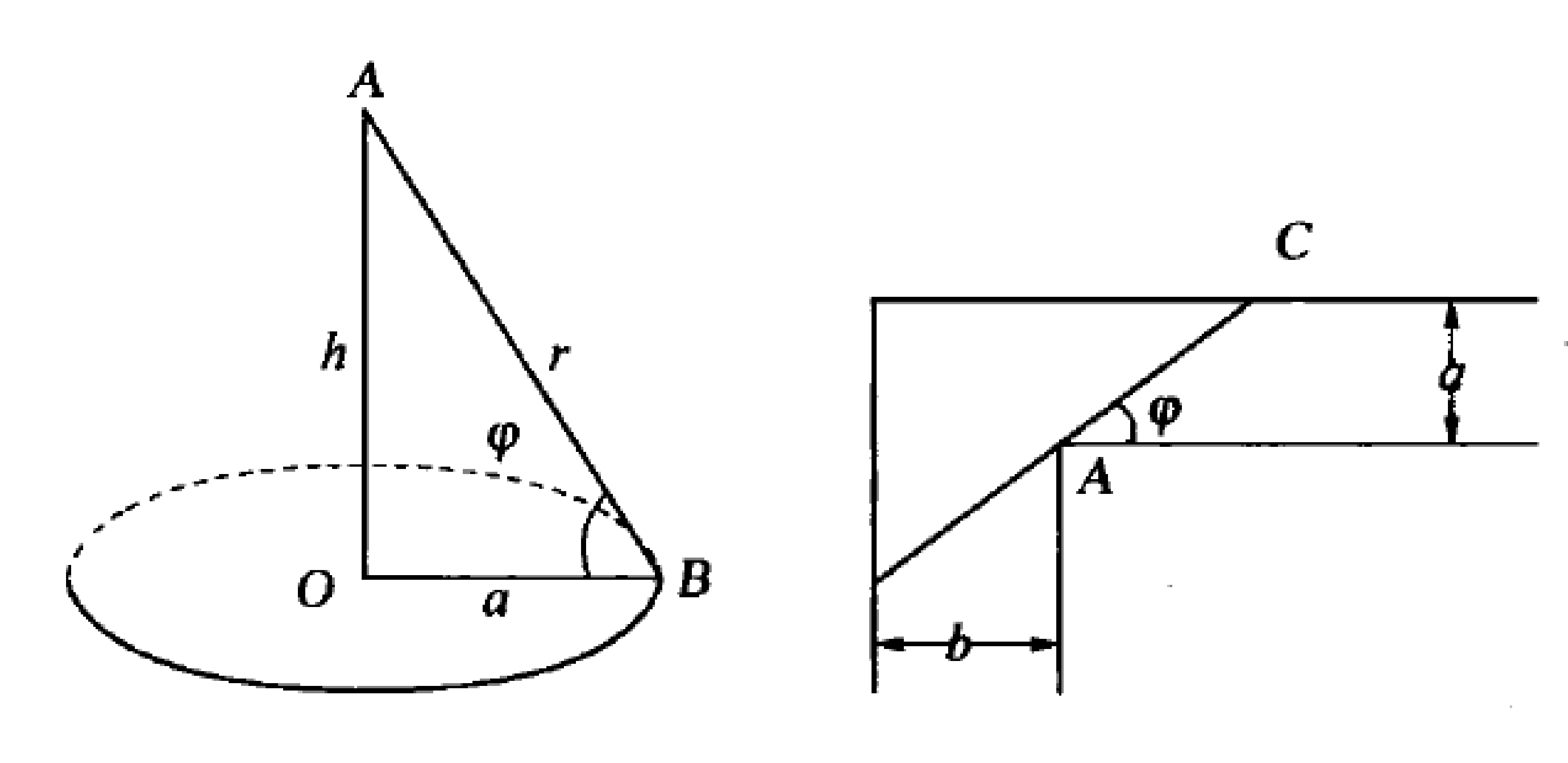
其中φ为灯光的倾角

r为光源离被照面积的距离

k为光源强度

解 如1586题图所示.由物理学知,照明亮度I为

$$I = k\frac{\sin\varphi}{r^2} = k\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r^3}.$$



1586 题图 1587 题图

设 $$f(r) = \frac{r^2-a^2}{r^6} = \frac{1}{r^4} - \frac{a^2}{r^6} \quad (0 < r < +\infty),$$

则 $$f'(r) = -\frac{4}{r^5} + \frac{6a^2}{r^7}.$$

设$f'(r) = 0$,解得$r = \sqrt{\frac{3}{2}}a$,经讨论知$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}a\right)$为最大,此时

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

因此,应在圆桌面中央上离桌面距离$\frac{a}{\sqrt{2}}$的地方安装电灯,才能使桌子边沿上的照度为最大.

【1587】 向宽为a米的河流修建一条宽为b米的运河,两者成直角相交,能驶进这条运河的船舶的最大长度是多少?

解 如1587题图所示,BC的长度为

$$l=\frac{a}{\sin\varphi}+\frac{b}{\cos\varphi},$$

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{b\sin^3\varphi-a\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}.$$

令$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\varphi}=0$,得 $\tan\varphi_0=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$.

从而 $$\sin\varphi_0=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos\varphi_0=\frac{b^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}},$$

而 $$\left.\frac{\mathrm{d}^2l}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_0}=3\left(\frac{b}{\cos\varphi_0}+\frac{a}{\sin\varphi_0}\right)>0,$$

因此 $l(\varphi_0)$ 为最小值,即船的长度不能超过

$$l(\varphi_0)=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

【1588】 船舶航行一昼夜的耗费由两部分组成:固定部分等于 a 卢布,变动部分与速度的立方成正比增加,问船舶以怎样的速度 v 航行是最经济的?

解 设航行的全程为 s,速度为 v,则总耗费为

$$Q=(a+kv^3)\cdot\frac{s}{v}=\frac{as}{v}+skv^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}v}=-\frac{as}{v^2}+2skv.$$

令$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}v}=0$. 解之得 $v_0=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$. 显然当 $v\in(0,v_0)$ 时,$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}v}<0$. 当 $v>v_0$ 时,$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}v}>0$. 所以 $Q(v_0)$ 为最小值. 即当船以速度 $v_0=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$ 航行时最经济.

【1589】 位于粗糙水平面上的货物重量为 P,要求用力将货物从原位置移动,如果货物的摩擦系数为 k,问作用力与水平面的倾角是多少能使所需的力是最小的?

解　设作用力 F 对水平面的倾角为 α，则

$$F\cos\alpha = k(P - F\sin\alpha),$$

即
$$F = \frac{kP}{\cos\alpha + k\sin\alpha}.$$

令
$$y = \cos\alpha + k\sin\alpha,$$

要使 F 最小，只要 y 最大

$$y'_\alpha = -\sin\alpha + k\cos\alpha.$$

令 $y'_\alpha = 0$，解得

$$\alpha_0 = \arctan k,$$

又
$$y''_\alpha\big|_{\alpha=\alpha_0} = -\cos\alpha_0 - k\sin\alpha_0 < 0,$$

即当 $\alpha_0 = \arctan k$ 时，y 为最大，从而 F 为最小力. 亦即此时最省力.

【1590】　在半径为 a 的半球形杯中放一根长度为 $l > 2a$ 的棒，求棒的平衡位置.

解　取球心为坐标原点. 当 $2a < l \leqslant 4a$ 时，设棒的重心竖坐标为 z，棒对杯口所在平面（xOy 平面）的倾角为 φ，则

$$z = -\left(2a\cos\varphi - \frac{l}{2}\right)\sin\varphi \qquad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

当棒平衡时，z 最小. 因此求 z 的极值. 而

$$z'_\varphi = -4a\cos^2\varphi + \frac{l}{2}\cos\varphi + 2a.$$

令 $z'_\varphi = 0$，得

$$\cos\varphi = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a} \qquad \text{（舍去负值）}.$$

经检验知此时 y 为最小值. 因此当 $\cos\varphi = \dfrac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a}$ 时棒取平衡位置. 当 $l > 4a$ 时，棒的重心在半球外，此时棒失去平衡，无平衡位置.

§14. 曲线相切.曲率圆.渐屈线

1. n 阶相切　有两曲线 $y=\varphi(x)$ 与 $y=\psi(x)$，若在点 x_0：$\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)(k=0,1,2,\cdots n)$.

且　　$\varphi^{(n+1)}(x_0)\neq\psi^{(n+1)}(x_0)$.

则称这两曲线在点 x_0 上有 n 阶相切(严格意义上讲!)

在这种情况下，当 $x\to x_0$ 时，$\varphi(x)-\psi(x)=O^*(x-x_0)^{n+1}$.

2. 曲率圆　圆周 $(x-\xi)^2+(y-\eta^2)=R^2$ 与已知曲线 $y=f(x)$ 有不低于 2 阶的相切，此圆称作在对应点的曲率圆.

这个圆的半径为 $R=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$，称作曲率半径；而 $k=\dfrac{1}{R}$ 称为曲率.

3. 渐屈线　曲率圆中心 (ξ,η)(曲率中心)

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

的轨迹称作已知曲线 $y=f(x)$ 的渐屈线.

【1591】　选择直线 $y=kx+b$ 的参数 k 和 b，使其与曲线 $y=x^3-3x^2+2$ 有高于 1 阶的相切.

解　要使直线与曲线有高于一阶的相切，必须有

$$(x^3-3x^2+2)''=(kx+b)''=0,$$

即　　$6x-6=0$,

即 $x=1$. 同时在 $x=1$ 两个一阶导数也应相等，即

$$(x^3-3x^2+2)'\big|_{x=1}=(kx+b)'\big|_{x=1}.$$

从而　　$k=3\cdot1^2-6\cdot1=-3$,

且当 $x=1$ 时，

$$(-3x+b)\big|_{x=1}=(x^3-3x^2+2)\big|_{x=1},$$

即　　$-3+b=0$,

$$b=3,$$

因此，所求直线为 $y=3(1-x)$.

【1592】　为使抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在点 $x=x_0$ 与曲线 $y=e^x$ 有二阶的相切，如何选择系数 a,b 和 c?

解　要使 $y=ax^2+bx+c$ 与 $y=e^x$ 在 x_0 处有二阶的相切，则必须有

$$\begin{cases} ax_0+bx_0+c=e^{x_0}, \\ 2ax_0+b=e^{x_0}, \\ 2a=e^{x_0}, \end{cases}$$

解之得　$a=\frac{1}{2}e^{x_0}, b=e^{x_0}(1-x_0)$,

$$c=e^{x_0}\left(1-x_0+\frac{x_0^2}{2}\right).$$

【1593】　下列曲线与 Ox 轴在点 $x=0$ 处相切的阶是多少?

(1) $y=1-\cos x$;

(2) $y=\tan x-\sin x$;

(3) $y=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$.

解　(1) $y'=\sin x, y''=\cos x$.

于是　$y'|_{x=0}=0, y''|_{x=0}=1$,

而对于 Ox 轴,其方程为 $y=0$. 故

$$y'=0, y^{(n)}=0 \qquad (n=1,2,\cdots),$$

因此,曲线 $y=1-\cos x$ 与 Ox 轴有一阶的相切.

(2) $y'=\sec^2 x-\cos x$,

$$y''=2\sec^2 x\tan x+\sin x,$$

$$y'''=4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x+\cos x,$$

因而　$y|_{x=0}=y'|_{x=0}=y''|_{x=0}=0$,

$$y'''|_{x=0}=3\neq 0,$$

因此,曲线 $y=\tan x-\sin x$ 与 Ox 轴有两阶的相切.

(3) $y'=e^x-(1+x), y''=e^x-1, y'''=e^x$,

因而　$y|_{x=0}=y'|_{x=0}=y''|_{x=0}=0, y'''|_{x=0}\neq 0$,

因此,曲线 $y=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$ 与 Ox 轴有两阶的相切.

【1594】　设曲线 $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$(当 $x\neq 0$) 及 $y=0$(当 $x=0$). 证明:曲线在点 $x=0$ 同 Ox 轴相切的阶为无穷大.

证明 由 1225 题的结果知

$$y^{(n)}|_{x=0}=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

即所给曲线在 $x=0$ 点与 Ox 轴无穷阶相切.

【1595】 求出双曲线 $xy=1$ 在下列各点的曲率半径和曲率中心:(1) $M(1,1)$;. (2) $N(100,0.01)$.

解 $y=\frac{1}{x},y'=-\frac{1}{x^2},y''=\frac{2}{x^3}$.

(1) 在点 $M(1,1)$,

$$y|_{x=1}=1,y'|_{x=1}=-1,y''|_{x=1}=2.$$

于是曲率半径为

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{[1+(-1)]^{\frac{3}{2}}}{2}=\sqrt{2},$$

曲率中心(ξ,η)为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=1-\frac{-1(1+1)}{2}=2,$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=1+\frac{2}{2}=2,$$

(2) 在点 $N(100,0.01)$ 有

$$y|_{x=100}=0.01,y'|_{x=100}=-0.0001,$$
$$y''|_{x=100}=2\times10^{-6}.$$

于是曲率半径为

$$R=\frac{[1+(10^{-4})^2]^{\frac{3}{2}}}{2\times10^{-6}}\approx5\times10^5,$$

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$
$$=100+\frac{10^{-4}(1+10^{-8})}{2\times10^{-6}}\approx150,$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=10^{-2}+\frac{1+10^{-8}}{2\times10^{-6}}\approx5\times10^5.$$

求下列曲线的曲率半径(1596 ~ 1602).

【1596】 抛物线 $y^2=2px$.

解 $y'=\frac{p}{y},y''=-\frac{p}{y^2}y'=-\frac{p^2}{y^3}$.

于是，曲率半径为

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{p^2}{y^3}\right|}=\frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

$$=p\left(1+\frac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}=p\left(1+\frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

【1597】 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\geqslant b>0)$.

解 　不妨设 $a>b$，则

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y},y''=-\frac{b^2}{a^2y}+\frac{b^2x}{a^2y^2}y'=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

于是曲率半径为

$$R=\frac{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2|y|^3}}=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$=\frac{(a^4b^2-a^2b^2x^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$=\frac{a^3b^3\left(a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}=\frac{(a^2-\varepsilon^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率.

【1598】 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 　$y'=\frac{b^2x}{a^2y},y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}$.

于是曲率半径为

$$R=\frac{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2|y|^3}}=\frac{(a^2b^2x^2-a^4b^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$=\frac{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}-a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}=\frac{(\varepsilon x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ 为双曲线的离心率.

【1599】 内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

解 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}},y''=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$.

于是曲率半径为

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\right|}=\left|\frac{\frac{a}{x}}{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}}\right|=3\mid axy\mid^{\frac{1}{3}}.$$

【1600】 椭圆 $x=a\cos t,y=b\sin t$.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-\frac{b}{a}\left(1-\frac{1}{\sin^2t}\right)}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2\sin^3t}.$$

于是曲率半径为

$$R=\frac{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\cot^2t\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b}{a^2\mid\sin^3t\mid}}=\frac{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

$$=\frac{a^3\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}=\frac{a^2}{b}(1-\varepsilon^2\cos^2t)^{\frac{3}{2}},$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率.

【1601】 摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\cot\frac{t}{2}\right)'_t}{x'_t}=\frac{\frac{-1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

于是曲率半径为

$$R=\frac{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}{|y''_x|}=\frac{\left(1+\cot^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}}=4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$$

$$=4a\sqrt{\frac{y}{2a}}=2\sqrt{2ay}.$$

【1602】 圆的渐伸线 $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$.

解 $\frac{dy}{dx}=\tan t$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{at\cos t}=\frac{1}{at\cos^3 t}$.

曲率半径为

$$R=\frac{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{|\sec^3 t|}{a|t|}}=a|t|.$$

【1603】 证明:二次曲线 $y^2=2px-qx^2$ 的曲率半径与法线段的立方成比例.

证明 曲线的曲率半径为

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|},$$

而法线段的长为

$$l=|y|\sqrt{1+y'^2},$$

因此 $\frac{R}{l^3}=\frac{1}{|y^3y''|}$.

下面求 y^3y''. 因为

$$y^2=2px-qx^2,$$

上式两边对 x 求两次导数得

$$yy' = p - qx \qquad yy'' + y'^2 = -q,$$

上式乘以 y^2,并将 $yy' = p - qx$ 代入得

$$y^3y'' + (p-qx)^2 = -q(2px - qx)^2,$$

化简得 $\quad y^3y'' = -p^2$,

因此 $\quad \dfrac{R}{l^3} = \dfrac{1}{|y^3y''|} = \dfrac{1}{P^2},$

为一常数.

【1604】 写出用极坐标表示的曲线的曲率半径公式.

解 设曲线的极坐标方程为 $r = r(\varphi)$,则由

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi.$$

有 $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi},$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3},$$

其中 $\quad r' = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}, r'' = \dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}.$

于是曲率半径为

$$R = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}.$$

求下列用极坐标表示的曲线的曲率半径(参数是正数)(1605 ~ 1608).

【1605】 阿基米德螺线 $r = a\varphi$.

解 因为 $r' = a, r'' = 0$,

于是曲率半径为

$$R = \frac{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2a^2}.$$

【1606】 对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$.

解 $r' = mae^{m\varphi} = mr, r'' = m^2ae^{m\varphi} = m^2r$,

所以曲率半径为

$$R=\frac{(r^2+m^2r^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2m^2r^2-m^2r^2|}$$

$$=\frac{r^3(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2(1+m^2)}=r\sqrt{1+m^2}.$$

【1607】 心脏形线 $r=a(1+\cos\varphi)$.

解 $r'=-a\sin\varphi, r''=-a\cos\varphi$,

于是曲率半径为

$$R=\frac{[a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}{a^2(1+\cos\varphi)^2+2a^2\sin^2\varphi+a^2\cos\varphi(1+\cos\varphi)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}a^3(1+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{3a^2(1+\cos\varphi)}=\frac{2}{3}\sqrt{2ar}.$$

【1608】 双纽线 $r^2=a^2\cos2\varphi$.

解 $r'=-\frac{a^2\sin2\varphi}{r}$,

$$r''=-\frac{2a^2\cos\varphi\cdot r-a^2\sin2\varphi r'}{r^2}=-\frac{r^4+a^4}{r^3},$$

$$r^2+2r'^2-rr''=\frac{3a^4}{r^2},(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{a^6}{r^3},$$

所以,曲率半径为

$$R=\frac{\frac{a^6}{r^3}}{\frac{3a^4}{r^2}}=\frac{a^2}{3r}.$$

【1609】 在曲线 $y=\ln x$ 上求出曲率最大的点.

解 $y'=\frac{1}{x}, y''=-\frac{1}{x^2}$,

所以曲率半径为

$$R=\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{|x|}.$$

要求曲率最大的点,只须求函数

$$f(x)=\frac{(1+x^2)^3}{x^2},$$

的最小值点.

$$f'(x)=\frac{2(1+x^2)^2(2x^2-1)}{x^3},$$

令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 及 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$(不在函数的定义域内舍去)

当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,$f'(x)<0$.

当 $\frac{1}{\sqrt{2}}<x<+\infty$,$f'(x)>0$.

因此,当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,$f(x)$ 取最小值.

所以,当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$,$y=-\frac{\ln 2}{2}$,曲率半径为最小,亦即曲率为最大.

因此,所求的点为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\ln 2}{2}\right)$.

【1610】 三次抛物线 $y=\frac{kx^3}{6}(0\leqslant x<+\infty,k>0)$ 的最大曲率等于 $\frac{1}{1000}$,求出达到这个最大曲率的点.

解 为方便起见,设 $c=\frac{k}{6}$.因为

$$y'=3cx^2,y''=6cx,$$

所以,曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6cx}{(1+9c^2x^4)^{\frac{3}{2}}}(x\geqslant 0),$$

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x}=6c\frac{\sqrt{1+9c^2x^4}(1-45c^2x^4)}{(1+9c^2x^4)^3}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x}=0$ 得 $x_0^4=\frac{1}{45c^2}(x_0>0)$.

当 $0 < x < x_0$ 时，$\dfrac{dk}{dx} > 0$.

当 $x_0 < x < +\infty$ 时，$\dfrac{dk}{dx} < 0$.

所以，$K(x_0)$ 为 $K(x)$ 的最大值.

根据条件有

$$K(x_0) = \frac{6c\sqrt[4]{\frac{1}{45c^2}}}{\left(1+9c^2\cdot\frac{1}{45c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6\sqrt{c}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{45}}}{\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{10^3},$$

解之得 $\quad c = \dfrac{18\sqrt{5}}{5^3\times 10^6}$.

从而 $\quad x_0^2 = \dfrac{1}{\sqrt{45c}} = \dfrac{5^2\times 10^6}{54}$,

即 $\quad x_0 = \dfrac{5\times 10^3}{3\sqrt{6}}$.

写出下列各曲线的渐屈线方程(1611 ～ 1615).

【1611】 **抛物线** $y^2 = 2px$ **的渐屈线.**

解 因为

$$y' = \frac{p}{q}, y'' = -\frac{p^2}{y^3},$$

故曲率中心坐标为

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x + \frac{\frac{p}{y}\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)}{\frac{p^2}{y^3}}$$

$$= x + \frac{y^2+p^2}{p} = x + \frac{2px+p^2}{p} = 3x+p,$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y - \frac{1+\frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{y^3}{p^2},$$

即 $\quad x = \dfrac{\xi - p}{3}, y^3 = -p^2\eta$.

由抛物线方程有

$$y^6=(2p)^3x^3,$$

所以渐屈线方程为

$$(-p^2\eta)^2=(2p^3)\cdot\left(\frac{\xi-p}{3}\right)^3.$$

整理得 $27p\eta^2=8(\xi-p)^3$.

【1612】 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的渐屈线.

解 $y'=-\frac{b^2x}{a^2y},y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}$.

故曲率中心坐标为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x-\frac{\frac{b^2x}{a^2y}\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)}{\frac{b^4}{a^2y^3}}$$

$$=x-\frac{x(a^4y^2+b^4x^2)}{a^4b^2}=x-\frac{x\left(a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2\right)}{a^2}$$

$$=\frac{c^2}{a^4}x^3\qquad(c^2=a^2-b^2),$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y-\frac{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}{\frac{b^4}{a^2y^3}}$$

$$=y-\frac{y(a^4y^2+b^4x^2)}{a^2b^4}=y-\frac{ya^2b^2\left(b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2\right)}{a^2b^4}$$

$$=-\frac{c^2}{b^4}y^3\quad(c^2=a^2-b^2),$$

即 $c^2x^3=a^4\xi,c^2y^3=-b^4\eta.$

于是 $x^2=\frac{a^{\frac{8}{3}}\xi^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}},y^2=\frac{b^{\frac{8}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}},$

代入椭圆方程,即得渐屈线方程为

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}}+(b\eta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}},$$

其中 $c^2=a^2-b^2$，这是一内摆线

【1613】 内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的渐屈线.

解 $y'=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$，$y''=\frac{1}{3}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$.

故曲率中心坐标为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x+\frac{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}$$

$$=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y+\frac{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}}$$

$$=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

于是 $$\xi+\eta=x+y+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})$$

$$=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}})$$

$$=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^3,$$

$$\xi-\eta=(x-y)-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})$$

$$=(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}})$$

$$=(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^3,$$

因此 $$(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}}+(\xi-\eta)^{\frac{2}{3}}=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^2+(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^2$$

$$=2(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=2a^{\frac{2}{3}}.$$

这就是所求渐屈线方程，它仍是一内摆线.

【1614】 曳物线 $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ 的渐屈线.

解 曳物线方程

$$x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}.$$

两边对 x 求导数得

$$1=a\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2-y^2}}\cdot\frac{-yy'}{\sqrt{a^2-y^2}}-\frac{y'}{y}\right)+\frac{yy'}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

化简整理得

$$y'=-\frac{4}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

则

$$y''=-\frac{y'}{\sqrt{a^2-y^2}}-\frac{y^2y'}{(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{a^2y'}{(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2},$$

所以曲率中心的坐标为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

$$=x+\frac{\dfrac{y}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1+\dfrac{y^2}{a^2-y^2}\right)}{\dfrac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}}$$

$$=x+\sqrt{a^2-y^2},$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y+\frac{\dfrac{a^2}{a^2-y^2}}{\dfrac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}}=\frac{a^2}{y},$$

由于 x,y 满足方程

$$x+\sqrt{a^2-y^2}=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

故

$$\xi=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

即

$$\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}=e^{\frac{\xi}{a}}. \qquad ①$$

将①式分子有理化得

$$\frac{a^2-(a^2-y^2)}{y(a-\sqrt{a^2-y^2})}=e^{\frac{\xi}{a}},$$

即 $$\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}=e^{-\frac{\xi}{a}}.\qquad ②$$

①+② 并除以 2 得

$$\frac{a}{y}=ch\frac{\xi}{a},$$

从而得 $$\eta=ach\frac{\xi}{a}.$$

这就是所求的渐屈线方程，它是一悬链线.

【1615】 对数螺线 $r=e^{m\varphi}$ 的渐屈线.

解 对数螺线的极坐标方程化为直角坐标方程得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln a+m\arctan\frac{y}{x},$$

两边对 x 求导数得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{m(xy'-y)}{x^2+y^2},$$

即 $$x+yy'=m(xy'-y).\qquad ①$$

由 ① 式解得

$$y'=\frac{x+my}{mx-y},$$

① 式两边再对 x 求导，并化简得

$$y''=\frac{1+y'^2}{mx-y},$$

所以，曲率中心的坐标为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=-my,$$

$$\eta=y+\frac{1+y'}{y''}=mx.$$

设 $$p=\sqrt{\xi^2+\eta^2},\varphi=\arctan\frac{\eta}{\xi},$$

而 $$\xi^2+\eta^2=m^2(x^2+y^2),\frac{\eta}{\xi}=-\frac{y}{x},$$

即 $\quad p = mr, \varphi = 4 - \frac{\pi}{2}$,

因此有 $\quad p = mr = ma \cdot e^{m\varphi} = ma e^{m(\varphi - \frac{\pi}{2})}$

即 $\quad p = ma e^{m(\varphi - \frac{\pi}{2})}$.

这就是所求渐屈线的方程,它也是一对数螺线.

【1616】 证明:摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 的渐屈线仍然是一根摆线,仅仅是其位置和已知摆线不同.

解 $\quad y' = \dfrac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot\dfrac{t}{2}, y'' = -\dfrac{1}{4a\sin\dfrac{4t}{2}}$.

于是曲率中心坐标为

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y'^2}$$

$$= a(t - \sin t) + \frac{\cot\frac{t}{2}\left(1 + \cot^2\frac{t}{2}\right)}{\dfrac{1}{4a\sin\frac{t}{2}}} = a(t + \sin t)$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = a(1 - \cos t) + \frac{1 + \cot^2\frac{t}{2}}{\dfrac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}}$$

$$= a(\cos t - 1).$$

令 $u = t - \pi$ 得

$$\xi = \pi a + a(u - \sin u),$$

$$\eta = -2a + a(1 - \cos u).$$

这仍是一摆线,只是其位置与原摆线的位置不同.

§ 15. 方程的近似解法

1. 比例法(弦位法)

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内是连续的且 $f(a)f(b) < 0$,

当 $a < x < b$ 时，$f'(x) \neq 0$，则方程

$$f(x) = 0, \qquad ①$$

在区间(a,b)内有且仅有一个实根 ξ. 取下值作为此根的第一近似值：

$$x_1 = a + \delta_1,$$

其中 $\delta_1 = -\dfrac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$，

然后把此方法用于函数 $f(x)$ 在其两端异号的区间(a, x_1)或(x_1, b)中的那一区间，得到根 ξ 的第二近似值 x_2. 以此类推，对于第 n 次近似值 x_n，下列公式是正确的：

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \qquad ②$$

其中 $m = \inf\limits_{a<x<b} |f'(x)|$，并且

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

2. 牛顿法(切线法)

如果在闭区间$[a,b]$上 $f''(x) \neq 0$ 且 $f(a)f''(a) > 0$，则可取数值

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

作为方程 ① 的根 ξ 的第一近似值 ξ_1.

重复运用这一方法，很快就得出趋近于根 ξ 的一系列近似值 $\xi_n (n = 1, 2\cdots)$，这些近似值的精确性可按照公式 ② 来估计.

为了粗略地确定方程的根，最好作出函数 $y = f(x)$ 的略图.

运用比例法，求下列方程的根(精确到 0.001).

【1617】 $x^3 - 6x + 2 = 0$.

解 设 $f(x) = x^3 - 6x + 2$，则 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，$f(0) = 2$，$f(1) = -3$，且当 $0 < x < 1$ 时，$f'(x) = 3x^2 - 6 \neq 0$. 因而所给方程在$(0,1)$内恰有一实根 ξ_1. 现求其近似值，以 x_i 表示此根的第 i 次近似值，则有

$$x_1 = 0+\delta_1 = -\frac{f(0)}{f(1)-f(0)}(1-0) = 0.4,$$

又 $f(0,4) = -0.336$,

故 $$x_2 = -\frac{f(0)}{f(0.4)-f(0)}(0.4-0) = 0.342,$$

$f(0.342) = -0.012$,

故 $$x_3 = -\frac{f(0)}{f(0.342)-f(0)}(0.342-0) = 0.340.$$

由于 $f(0.340) = -0.001$,

$$m_1 = \inf_{0\leqslant x\leqslant 1} |f'(x)| = 3.$$

如果取 x_3 作 ξ_1 的近似值,则其误差为

$$|0.340-\xi_1| \leqslant \frac{|f(0.340)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需要的精确度,于是,所给方程的一近似根为 0.340.

又 $f(2) = -2, f(3) = 11$. 且当 $2 < x < 3$ 时 $f'(x) \neq 0$,故方程在(2,3)内恰有一实根 ξ_2. 运用上面的方法可求得满足精度要求的 ξ_2 的近似值为

$$\xi_2 \approx 2.262.$$

再求第三个根,因为 $f(-2) = 6, f(-3) = -7$,故在(-3,-2)内,方程恰有一根 ξ_3. 同样可求出 ξ_3 近似值为

$$\xi_3 \approx -2.602.$$

【1618】 $x^4 - x - 1 = 0$.

解 设

$$f(x) = x^4 - x - 1.$$

则 $f'(x) = 4x^3 - 1$,

令 $f'(x) = 0$,

解得 $$x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

当 $-\infty < x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ 时,$f'(x) < 0$,故 $f(x)$ 单调减少.

当$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} < x < +\infty$时，$f'(x) > 0$，故 $f(x)$ 单调增加.

而 $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{1}{4^{\frac{4}{3}}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 1 < 0,$$

故方程有两个根，一个位于$\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$，一个位于$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, +\infty\right)$.

由于 $f(1) = -1, f(2) = 13$，且当 $1 < x < 2$ 时，$f'(x) \neq 0$，故所给方程在$(1,2)$内恰有一根 ξ_1，按 1617 题的方法可求得满足精度要求的近似值为 $\xi_1 \approx 1.221$.

又 $f(-1) = 1, f(0) = -1$，且当 $-1 < x < 0$ 时 $f'(x) \neq 0$. 故方程有$(-1,0)$内恰有一实根 ξ_2，同样可求得 ξ_2 的近似值为 $\xi_2 \approx -0.724$.

【1619】 $x - 0.1\sin x = 2$.

解 设 $f(x) = x - 0.1\sin x - 2$，

因为 $$f'(x) = 1 - 0.1\cos x > 0,$$

故应在$(-\infty, +\infty)$内严格单调增加，而

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

故原方程恰有一实根，又

$$f(2) = -0.1\sin 2 = -0.091,$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) \approx 0.0237.$$

故方程仅有的一实根位于$\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$，应用比例法，可求得方程的根 ξ 的近似值为 $\xi = 2.087$(弧度).

【1620】 $\cos x = x^2$.

解 设 $f(x) = \cos x - x^2$，因为 $f(-x) = f(x)$，故若方程有一个根 ξ，则方程必有另一根 ξ_0 故我们只须考虑 $x \geq 0$ 的情形，又

$$f'(x) = -\sin x - 2x < 0 (x > 0).$$

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少，而

$$f(0)=1>0,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,$$

故原方程恰有一正根 ξ，又

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.09,f(1)=-0.46,$$

故方程唯一的正根 $\xi\in\left(\frac{\pi}{4},1\right)$，利用1617题中的方法可求得 ξ 的近似值为 $\xi\approx0.825$.

因此，所给方程的两个近似根为 ±0.825

运用牛顿法，以指定的精确度求出以下方程的根：

【1621】 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=10x$ （精确到 10^{-3}）.

解 曲线 $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 与 $y=10x$ 有两个交点，因此，所给方程有两个根，设 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-10x$，则

$$f(0.4)=2.41,f(0.5)=-0.75,$$

且在 $[0.4,0.5]$ 内

$$f''(x)=2+\frac{6}{x^4}\neq0,f(0.4)f''(0.4)>0,$$

故所给方程在 $(0.4,0.5)$ 内恰有一实根，并可利用牛顿法求近似根，其切点取为 $(0.4,f(0.4))$. 依次求得其各次近似值为

$$x_1=0.4-\frac{f(0.4)}{f'(0.4)}=0.459,$$

$$x_2=0.459-\frac{f(0.459)}{f'(0.459)}=0.471,$$

$$x_3=0.471-\frac{f(0.471)}{f'(0.471)}=0.472.$$

而 $$f(x_3)=f(0.472)=-0.013,$$

$$m=\inf_{0.4\leqslant x\leqslant0.5}|f'(x)|=|f'(0.5)|=25,$$

故 $$|x_3-\xi|\leqslant\frac{|f(0.472)|}{m}<0.001,$$

故所给方程的一个近似根为 0.472.

现求第二近似根，由于 $f(10)=0.001$. 故此根可能靠近 10，而 $f(9.9)=-0.98$. 而在(9.9,10) 内 $f'(x)\neq 0$，故方程在(9.9,10) 内恰有一个根 ξ_1. 又 $f(10)f''(10)>0$，$f''(x)\neq 0$，故应用牛顿法求近似根时，切点应选在$(10,f(10))$ 处，于是

$$x_1=10-\frac{f(10)}{f'(10)}=9.9999,$$

而 $$m=\inf_{9.9\leqslant x\leqslant 10}|f'(x)|=|f'(9.9)|\geqslant 8,$$

故 $$|x_1-\xi_1|\leqslant\frac{|f(x)_1|}{m}<0.0001.$$

因此，选取 x_1 作为 ξ_1 的近似值已达到精度要求. 故原方程的另一根的近似值为 $\xi_1\approx 9.9999$.

【1622】 $x\lg x=1$　（精确到 10^{-4}）.

解　设 $f(x)=x\lg x-1$.

则 $$f'(x)=\frac{\ln x+1}{\ln 10},$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{e}$.

故当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$，

当 $\dfrac{1}{e}<x<+\infty$，$f'(x)>0$，

又 $$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\lg^{\frac{1}{e}}-1<0,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=-1<0.$$

故原方程只有一根且位于 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$内，又 $f(2.506)=-0.0002$，$f(2.507)=0.0006$，且当 $2.506<x<2.507$ 时，$f'(x)>0$. 故方程的唯一根在(2.506,2.507) 内，应用牛顿法，切

点选在(2.507,$f(2.507)$).依次计算各次近似值得

$$x_1 = 2.507 - \frac{f(2.507)}{f''(2.507)} \approx 2.5064,$$

$$x_2 = 2.5062,$$

由于 $f(2.5062) = 0.000013$,

$$m = \inf_{2.506 \leqslant x \leqslant 2.507} |f'(x)|$$

$$= |f'(2.506)| = 0.83,$$

故如果取 2.5062 作为根的近似值,其误差为

$$|2.5062 - \xi| \leqslant \frac{|f(2.5062)|}{m} < 0.0001,$$

已达到所需精度.故方程根的近似值为 $\xi \approx 2.5062$.

【1623】 $\cos x \cdot \operatorname{ch} x = 1$ (精确到 10^{-3})(对于正根).

解 曲线 $y = \cos x$ 与 $y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ 有无穷多个交点,其中最小的三个正根,分别记为 α,β,γ,且

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi, 2\pi < \beta < \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} < \gamma < 4\pi,$$

利用牛顿法可算得 $\alpha \approx 4.7301, \gamma \approx 10.9956$.

【1624】 $x + e^x = 0$ (精确到 10^{-5}).

解 设 $f(x) = x + e^x$.

则 $f'(x) = 1 + e^x > 0, f''(x) = e^x > 0$,

且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,

故方程有且只有一实根.

由于 $f(0) = 1, f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$,

故方程的唯一实根位于(−1,0)内,应用牛顿法,切点应选在(0,1)处,依次求得根的各次近似值为

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{1}{2} = -0.5,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0.56631,$$

$$x_3 = -0.567132 \qquad x_4 = -0.567145.$$

由于 $$|x_4 - \xi| \leqslant \frac{|f(-0.567145)|}{m}.$$

$$= \frac{|f(-0.567145)|}{1+e^{-1}} = 1.96 \times 10^{-6} < 10^{-5},$$

故取 $\xi = -0.567145$，即可保证所需的精度.

【1625】 $x\text{th}x = 1$ （精确到 10^{-6}）.

解 在 $x\text{th}x$ 中以 $-x$ 代替 x，其值不变，故若方程有根 ξ，则 $-\xi$ 也必为其根. 因此，我们只须讨论 $x > 0$ 的情况

设 $$f(x) = \text{th}x - \frac{1}{x},$$

则 $$f'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2 x} + \frac{1}{x^2} > 0.$$

又 $$\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

故方程有唯一的正实根. 又

$$f(1) = -0.2384, f(2) = 0.4640,$$

所以方程唯一的正根 $\xi \in (1,2)$. 又

$$f''(x) = -\frac{2\text{sh}x}{\text{ch}^3 x} - \frac{3}{x^3} < 0 (x > 0),$$

故应用牛顿法切点应选在 $(1, f(1))$. 应用牛顿法求各次近似根得

$$x_1 = 1.168, x_2 = 1.1989, x_3 = 1.1996781.$$

而 $$m = \inf_{1\leqslant x\leqslant 2} |f'x| = |f'(2)| = 0.36,$$

故 $$|x_3 - \xi| \leqslant \frac{|f(x_3)|}{m} < 10^{-6},$$

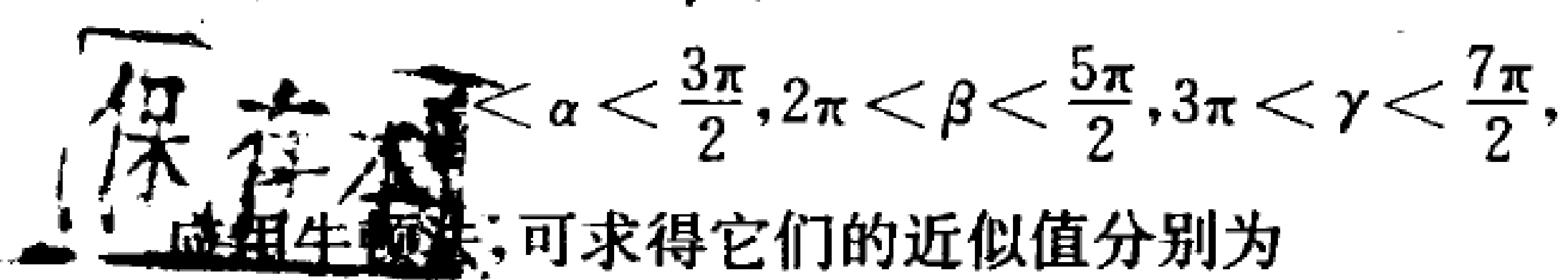
因而 $\xi \approx 1.1996781$.

于是可取 ± 1.1996781 为方程的近似根.

【1626】 求出方程 $\tan x = x$ 的前三个正根（精确到 0.001）.

解 由 $y = \tan x$ 及 $y = x$ 的图形知，方程有无穷多个根，其

三个最小的正根 α,β,γ 满足



$$< \alpha < \frac{3\pi}{2}, 2\pi < \beta < \frac{5\pi}{2}, 3\pi < \gamma < \frac{7\pi}{2},$$

应用牛顿法,可求得它们的近似值分别为

$$\alpha \approx 4.493, \beta \approx 7.725, \gamma \approx 10.9041.$$

它们的求法只是利用牛顿迭代公式并估计误差. 我们这里不将其计算列出来. 有兴趣的同学可利用计算机编程来计算.

【1627】 求出方程 $\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$ 的两个正根(精确到 10^{-3}).

解 由 $y = \cot x$ 与 $y = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$ 的图形知方程有无穷多个根,其两个最小正根 α,β 满足

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi.$$

uy 利用牛顿法可求得它们的近似值分别为

$$\alpha \approx 2.0816, \beta \approx 5.9404.$$

它们的求法只是利用牛顿迭代公式并估计误差. 我们这里不将其计算列出来. 有兴趣的同学可利用计算机编程来计算.